З.Ә.ӘЛӘСКӘРОВА, Ф.Һ.НӘСИБОВ,
В.Ч.АСЛАНОВ

# ЕҺТИМАЛ НӘЗӘРИЈЈӘСИНӘ АИД МӘСӘЛӘ ҺӘЛЛИНӘ РӘҺБӘРЛИК

Олимпија ојунларында галиб кәлмә еһтималыны һесабла

БАКЫ-1998

УДК 519.21

Дос.З.Ә.Әләскәрова, проф. Ф.Һ.Нәсибов, дос.В.Ч.Асланов
"Еһтимал нәзәријјәсинә аид мәсәлә һәллинә рәһбәрлик"
(Али мәктәб тәләбәләри үчүн)
Тәдрис вәсаити. Бакы, АДНА-нын нәшри, 1998. 186 сәһ.

Тәдрис вәсаити еһтимал нәзәријјәсинә аид мәсәлә һәллинә рәһбәрлик кими нәзәрдә тутулмушдур. Китабда еһтимал нәзәријјәсинин елементләри гыса нәзәри мә"лумат кими верилир. Сонракы параграфда бир чох нүмунәви мәсәләләрин һәлли верилмишдир. Ахырда исә һәр параграфда бахылан мәсәлә илә әлагәдар сәрбәст ишләмәк үчүн мәсәләләр верилмишдир.

Тәгдим олунан вәсаит али мәктәб тәләбәләриндән башга литсеј вә коллеч тәләбәләри, һабелә еһтимал нәзәријјәсини мүстәгил өјрәнән, өз практики ишиндә еһтимал нәзәријјәсини тәтбиг едән һәр кәс үчүн гијмәтли вәсаитдир.

Редактору: проф.Нәсибов Ф.Һ

Рә"ј верәнләр: дос.Һүсејнов М.М.,
Бабајев А.Х. Н.Туси адына Азәрбајчан Педагожи Университетинин досенти, физика-ријазијјат елмләри намизәди
Чәфәров К.М. Н.Туси адына Азәрбајчан Педагожи Университетинин һесаблама ријазијјат кафедрасынын досенти, физика-ријазијјат елмләри намизәди.

Составители: доц. Зиба Алихейбаровна Алескерова,
проф. Фархад Гусейн оглы Насибов,
доц. Видади Джангир оглы Асланов

Руководство к решению задач по теории вероятностей.
Баку, изд.АГНА, 1998, 186 стр.

ISBN 5-86874-121-8
© Сәда нәшријјаты
© Азәрбајчан Дөвләт Нефт Академијасы,

# Кириш

Тәгдим олунан китаб еһтмал нәзәријјәсинин әсас анлајышларына һәср олунмушдур. Китабда али мәктәбләрин үмумихтисас, игтисад вә дикәр факүлтәләрин програмларына дахил олан мөвзулара аид материал верилмишдир.

Китаб проф.Ф.Һ.Нәсибовун "Еһтимал нәзәријјәси вә ријази статистиканын елементләри" адлы дәрслијинә ујғун тәртиб едилмәклә, дөрд фәсилдән ибарәтдир.

I фәсил еһтимал нәзәријјәсинин әсас анлајышларына, II фәсил тәкрар сынаглар вә Бернулли схеминә, III фәсил тәсадүфи кәмијјәтләр вә онларын пајланма функсијалары, IV фәсил бөјүк әдәдләр ганунуна һәср олунмушдур.

Һәр фәслин дахилиндә мүстәгил параграфлар верилир. Әввәлчә бахылан мөвзуја даир гыса нәзәри мә"лумат, сонра исә һәмин мә"лумата даир чохлу сајда нүмунәви мәсәләләрин һәлли, нәһајәт, верилән материалы даһа дәриндән анламаг үчүн мүстәгил шәкилдә һәлл едилмәли мәсәләләр верилир. Һәлл олунмуш мәсәләләрдә истифадә олунан методика тәклиф олунан мәсәләләри һәлл етмәк үчүн истигамәтләндиричи әсас кими нәзәрдә тутулмушдур.

Бу китабдан бүтүн али мәктәбләрин тәләбәләри, еләчә дә литсеј вә коллечләрин тәләбәләри, һәм дә еһтимал нәзәријјәсини сәрбәст өјрәнәнләр, ону өз практики ишләриндә тәтбиг едән һәр кәс истифадә едә биләр.

# Еһтимал нəзəријјəсинин əсас анлајышлары.

## 1.1. Һадисə. Һадисəлəр үзəриндə əмəллəр.

### 1. Нəзəри мə"лумат.

1. Мəлум олдуғу кими (бах, [1]) үч нөв һадисəдəн данышмаг олар: јəгин һадисə (U), мүмкүн олмајан һадисə (V) вə тəсадүфи һадисə (A,B,C,...).

Һəр бир һадисə мүəјјəн шəртлəр комплекси дахилиндə баш верир. Белə шəртлəрин һəјата кечирилмəсинə сынаг дејилир.

Сынағын ејни шəртлəр дахилиндə бир нечə дəфə тəкрар олунмасына сынаглар серијасы, бу серијада һəр бир сынаға ваһид сынаг дејилир.

Ваһид сынаг заманы $A_i$ (i=1,2,...,n) һадисəлəриндəн һеч олмазса бири мүтлəг баш верəрсə, онда белə һадисəлəрə јеканə мүмкүн һадисəлəр дејилир.

Ејни шəртлəр дахилиндə биркə баш верə билмəјəн һадисəлəрə ујушмајан һадисəлəр дејилир.

Əкəр сынаг заманы һəр һансы һадисəнин башгаларына нисбəтəн даһа тез-тез баш верəчəјини һөкм етмəјə һеч бир əсас јохдурса, онда белə һадисəлəрə ејни имканлы, əкс һалда исə ејни имканлы олмајан һадисəлəр дејилир.

2. A вə B һадисəлəриндəн һеч олмазса бири баш вердикдə (вə анчаг бу заман) баш верəн C һадисəсинə A вə B һадисəлəринин чəми, јахуд бирлəшмəси дејилир вə AUB, A+B, (A јахуд B) кими ишарə едилир:

$$C = A \cup B = A+B = (A \text{ јахуд } B).$$

А вә В һадисәләринин һәр икиси баш вердикдә (вә анчаг бу заман) баш верән С һадисәсинә А вә В һадисәләринин һасили (кәсишмәси) дејилир вә $A \cap B$, $A \cdot B$, (А вә В) кими ишарә едилир:

$$C = A \cap B = A \cdot B = (A \text{ вә } B).$$

А һадисәси баш вердикдә В һадисәси дә баш верирсә, В-ә А-нын нәтичәси дејилир вә $A \subset B$ ишарә олунур.

$A \subset B$ вә $B \subset A$ олдугда $A = B$ гәбул олунур.

Тутаг ки, ваһид сынаг апарылыр. Бу сынаг нәтичәсиндә ја көзләнилән А һадисәси баш верир, ја да А баш вермир. А-нын баш вермәдијини $\overline{A}$ кими ишарә едир вә өзүнә дә А һадисәсинин әкс һадисәси дејирләр. А һадисәси баш вердикдә, В исә баш вермәдикдә баш верән С һадисәсинә А-В фәрги дејилир.

Нәзәрдә тутулан шәртләр комплексини һәјата кечирдикдә алынан һадисәләр системинә онларын расили, чәми, фәрги U вә V һадисәләри дә дахил оларса, алынан кенишләнмиш системә һадисәләр мејданы дејилир.

$A = A_1 + A_2 + ... + A_n$, $A_i \cdot A_j = V$ $(i \neq j)$ олдугда дејирләр ки, А һадисәси $A_1$, $A_2$, ... ,$A_n$ - хүсуси һалларына ајрылыр.

2. Мәсәлә һәлли нүмунәләри.

Мәсәлә 1. Тәсадүфи көтүрүлмүш машын һиссәси биринчи нөв (А), икинчи нөв (В), јахуд үчүнчү нөв (С) ола биләр. $A+C$, $B+C$, $\overline{B+C}$, $A \cdot B$, $A \cdot B + C$ һадисәләри нәји ифадә едир?

Һәлли. Чәмин тә"рифинә көрә $A+C$ һадисәси А вә С һадисәләриндән һеч олмазса биринин баш вермәси демәкдир. Она көрә дә $A+C$ һадисәси кө-

түрүлән машын һиссәсинин ја биринчи, ја да үчүнчү нөв олмасыны ифадә едир. B+C һадисәси көтүрүлән машын һиссәсинин ја икинчи, ја да үчүнчү нөв олмасыны ифадә едир. Онда $\overline{B+C}$ һадисәси һәмин һадисәнин икинчи вә үчүнчү нөв олмамасыны, јә"ни биринчи нөв олмасыны көстәрир. Бир һиссә ејни заманда биринчи вә икинчи нөв ола билмәдијиндән $A \cdot B$ - мүмкүн олмајан һадисәдир. Онда $A \cdot B+C=C$ олар, јә"ни көтүрүлән һиссә үчүнчү нөвдүр.

Мәсәлә 2. Әдәдләр чәдвәлиндән ихтијари ики әдәд сечилир. A вә B һадисәләри бу әдәдләрдән биринин садә, дикәринин исә тәк әдәд олдуғуну көстәрир. $A \cdot B$ вә $A+B$ һадисәләри нәји ифадә едир?

Һәлли. Һадисәләрин һасилинә верилән тә"рифә көрә $A \cdot B$ бахылан әдәдләрин бирин тәк, дикәринин исә садә олдуғуну көстәрир (мәс. 3 вә 9). $A+B$ исә чәмин тә"рифинә көрә сечилмиш әдәләрдән биринин тәк, јахуд биринин садә, јахуд да биринин тәк вә о биринин садә олдуғуну көстәрир (мәс. 9 вә 12; 5 вә 16; 7 вә 15).

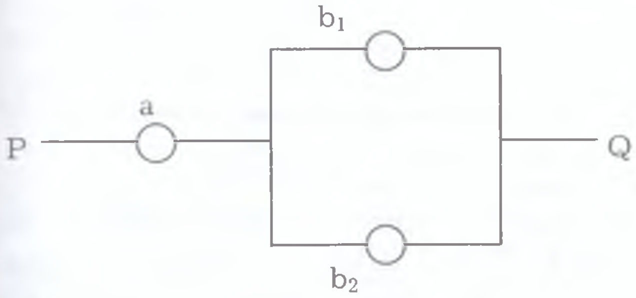
Мәсәлә 3. $\overline{A+B}=\overline{A} \cdot \overline{B}$ вә $\overline{A \cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$ олдуғуну исбат етмәли.

Һәлли. 1) Әввәлчә $\overline{A+B}=\overline{A} \cdot \overline{B}$ олдуғуну исбат едәк. Бунун үчүн $\overline{A+B} \subset \overline{A} \cdot \overline{B}$ вә $\overline{A} \cdot \overline{B} \subset \overline{A+B}$ олдуғуну көстәрмәк лазымдыр. $\overline{A+B}$ һадисәсинин баш вермәси $A+B$ - нин баш вермәмәси демәкдир. Бу исә A вә B һадисәләринин һеч биринин баш вермәдијини, јә"ни $\overline{A}$ вә $\overline{B}$ һадисәләринин вә демәли, $\overline{A} \cdot \overline{B}$ һадисәсинин баш вердијини көстәрир. $\overline{A+B}=\overline{A} \cdot \overline{B}$ мүнасибәти исбат олунду.

2) Инди $\overline{A+B}=\overline{A} \cdot \overline{B}$ олдуғуну исбат едәк. Әкәр $\overline{A \cdot B}$ һадисәси баш вермишсә, онда $A \cdot B$ һадисәси

баш вермәмишдир. Јә"ни $A$ вә $B$ һадисәләриндән һеч олмазса бири баш вермәмишдир. Бу исә о демәкдир ки, ја $\overline{A}$ вә $B$, ја да $A$ вә $\overline{B}$, ја да $\overline{A}$ вә $\overline{B}$ һадисәләри вә демәли, $\overline{A}+\overline{B}$ һадисәси баш вермишдир. Демәли, $\overline{A\cdot B} \subset \overline{A}+\overline{B}$ . $\overline{A+B} \subset \overline{A}\cdot\overline{B}$ мүнасибәти ашкардыр.

Мәсәлә 4. $P$ вә $Q$ нөгтәләрини бирләшдирән електрик дөврәсиндә (шәкил 1) $A$ һадисәси $a$ елементинин, $B_k$ исә $b_k$ $(k=1,2)$ елементинин сырадан чыхмасы һадисәси олдугда,дөврәнин ишләмәмәси - $C$, ишләмәси $\overline{C}$ һадисәләрини $A,B_1,B_2$ һадисәләри илә ифадә етмәли.




Шәкил 1.

Һәлли. $a$ елементи вә ја $b_k$ $(k=1,2)$ елементләринин һәр икиси ејни заманда сырадан чыхдыгда дөврә сырадан чыхыр. Бу ујгун олараг $A$ вә $B_1\cdot B_2$ һадисәләридир. Демәли, $C=A+B_1\cdot B_2$ . Онда 3-чү мәсәләдә исбат олунмуш мүнасибәтләрә көрә јаза биләрик:

$$C=\overline{A+B_1\cdot B_2}=\overline{A}\cdot\overline{B_1\cdot B_2}=\overline{A}\cdot(\overline{B_1}+\overline{B_2})\ .$$

түрүлән машын һиссәсинин ја биринчи, ја да үчүнчү нөв олмасыны ифадә едир. B+C һадисәси көтүрүлән машын һиссәсинин ја икинчи, ја да үчүнчү нөв олмасыны ифадә едир. Онда $\overline{B+C}$ һадисәси һәмин һадисәнин икинчи вә үчүнчү нөв олмамасыны, јә"ни биринчи нөв олмасыны көстәрир. Бир һиссә ејни заманда биринчи вә икинчи нөв ола билмәдијиндән A·B – мүмкүн олмајан һадисәдир. Онда A·B+C=C олар, јә"ни көтүрүлән һиссә үчүнчү нөвдүр.

Мәсәлә 2. Әдәдләр чәдвәлиндән ихтијари ики әдәд сечилир. A вә B һадисәләри бу әдәдләрдән биринин садә, дикәринин исә тәк әдәд олдуғуну көстәрир. A·B вә A+B һадисәләри нәји ифадә едир?

Һәлли. Һадисәләрин һасилинә верилән тә"рифә көрә A·B бахылан әдәдләрин бирин тәк, дикәринин исә садә олдуғуну көстәрир (мәс. 3 вә 9). A+B исә чәмин тә"рифинә көрә сечилмиш әдәләрдән биринин тәк, јахуд биринин садә, јахуд да биринин тәк вә о биринин садә олдуғуну көстәрир (мәс. 9 вә 12; 5 вә 16; 7 вә 15).

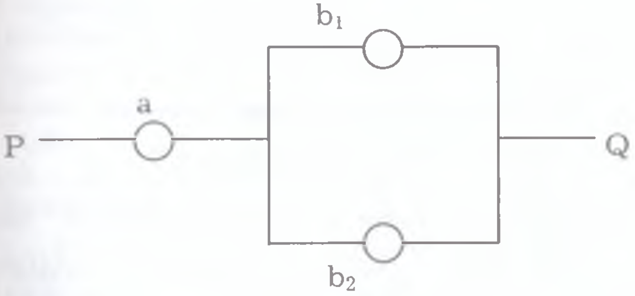
Мәсәлә 3. $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ вә $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$ олдуғуну исбат етмәли.

Һәлли. 1) Әввәлчә $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ олдуғуну исбат едәк. Бунун үчүн $\overline{A+B}\subset\overline{A}\cdot\overline{B}$ вә $\overline{A}\cdot\overline{B}\subset\overline{A+B}$ олдуғуну көстәрмәк лазымдыр. $\overline{A+B}$ һадисәсинин баш вермәси A+B – нин баш вермәмәси демәкдир. Бу исә A вә B һадисәләринин һеч биринин баш вермәдијини, јә"ни $\overline{A}$ вә $\overline{B}$ һадисәләринин вә демәли, $\overline{A}\cdot\overline{B}$ һадисәсинин баш вердијини көстәрир. $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ мүнасибәти исбат олунду.

2) Инди $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ олдуғуну исбат едәк. Әкәр $\overline{A\cdot B}$ һадисәси баш вермишсә, онда A·B һадисәси

баш вермәмишдир. Јә"ни А вә В һадисәләриндән һеч олмазса бири баш вермәмишдир. Бу исә о демәкдир ки, ја $\overline{A}$ вә B, ја да A вә $\overline{B}$, ја да $\overline{A}$ вә $\overline{B}$ һадисәләри вә демәли, $\overline{A}+\overline{B}$ һадисәси баш вермишдир. Демәли, $\overline{A \cdot B} \subset \overline{A}+\overline{B}$ . $\overline{A+B} \subset \overline{A} \cdot \overline{B}$ мүнасибәти ашкардыр.

Мәсәлә 4. P вә Q нөгтәләрини бирләшдирән електрик дөврәсиндә (шәкил 1) A һадисәси a елементинин, $B_k$ исә $b_k$ (k=1,2) елементинин сырадан чыхмасы һадисәси олдугда,дөврәнин ишләмәмәси - C, ишләмәси $\overline{C}$ һадисәләрини $A, B_1, B_2$ һадисәләри илә ифадә етмәли.

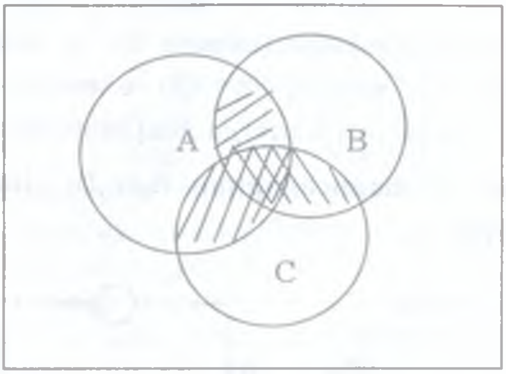



Шәкил 1.

Һәлли. a елементи вә ја $b_k$ (k=1,2) елементләринин һәр икиси ејни заманда сырадан чыхдыгда дөврә сырадан чыхыр. Бу ујгун олараг A вә $B_1 \cdot B_2$ һадисәләридир. Демәли, $C=A+B_1 \cdot B_2$ . Онда 3-чү мәсәләдә исбат олунмуш мүнасибәтләрә көрә јаза биләрик:

$$C = \overline{A+B_1 \cdot B_2} = \overline{A} \cdot \overline{B_1 \cdot B_2} = \overline{A} \cdot (\overline{B_1}+\overline{B_2}) .$$

Мәсәлә 5. Масанын үзәриндә үч даирә (A,B,C) чәкилмишдир (шәкил 2). Масанын үзәринә атылан күрәчијин A даирәси дахилинә дүшмәси һадисәси A, B даирәси дахилинә дүшмәси һадисәси B,C даирәси дахилинә дүшмәси һадисәси исә C олсун. $\overline{A}$, $\overline{B}$, A+B+C, $\overline{A+B+C}$, ABC вә $\overline{A \cdot B \cdot C}$ һадисәләринин мә"насыны арашдырын.




Шәкил 2.

Һәлли. $\overline{A}$ һадисәси күрәчијин A даирәсинә дүшмәмәси, $\overline{B}$ исә онун B даирәсинә дүшмәмәси һадисәсини көстәрир. A+B+C - күрәчијин A,B.C даирәләриндән һеч олмазса биринә дүшмәси һадисәсини көстәрир. A+B+C вә $\overline{A+B+C}$ һадисәләри гаршылыглы әкс олдугларындан $\overline{A+B+C}$ һадисәси күрәчијин A,B,C даирәләринин һеч биринә дүшмәмәси һадисәсидир. A·B·C һадисәси күрәчијин A,B,C даирәләринин ортаг һиссәсинә - кәсишмәсинә дүшмәсини ифадә едир. Нәһајәт, $\overline{A \cdot B \cdot C}$ һадисәси күрәчијин верилән даирәләрин кәсишмәсинә дүшмәсини көстәрир.

Мәсәлә 6. $A(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ бәрабәрлијинин доғрулуғуну исбат един.

Һәлли. Бу бәрабәрлији исбат етмәк үчүн

а) $A\cdot(B+C) \subset A\cdot B+A\cdot C$

в) $A\cdot B+A\cdot C \subset A\cdot(B+C)$

мүнасибәтләринин доғрулуғуну көстәрмәк лазымдыр.

Әввәлчә а) мүнасибәтини исбат едәк. Тутаг ки, $A\cdot(B+C)$ һадисәси баш вермишдир. Бу о демәкдир ки, A вә B+C һадисәләри баш вермишләр. B+C һадисәсинин баш вермәсиндән исә B вә C һадисәләриндән һеч олмазса биринин (мәсәлән C) баш вермәси чыхыр. Демәли, $A\cdot(B+C)$ һадисәсинин баш вермә-синдән $A\cdot C$ һадисәсинин баш вермәси алыныр. Бу исә о демәкдир ки, $A\cdot B+A\cdot C$ һадисәси баш верир. Беләликлә көстәрдик ки, $A\cdot(B+C) \subset A\cdot B+A\cdot C$ мүна-сибәти доғрудур.

Инди дә в) мүнасибәтини исбат едәк. Тутаг ки, $A\cdot B+A\cdot C$ һадисәси баш верир. Бурадан алыныр ки, $A\cdot B$ вә $A\cdot C$ һадисәләриндән реч олмазса бири (мәсәлән $A\cdot B$) баш верир. $A\cdot B$ һадисәсинин баш вермәси исә A вә B һадисәләринин ејни заманда баш вермәси демәкдир. Демәли, һәм дә A вә B+C һадисәләри, јә"ни $A\cdot(B+C)$ һадисәси баш верир. Бу исә в) мүнасибәтинин доғрулуғуну көстәрир.

## 3. Сәрбәст ишләмәк үчүн мәсәләләр.

1. Ашағыдакы мүнасибәтләрин доғрулуғуну исбат един.

а) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B) = A\cdot B$

в) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})) = V$

с) $(A+\overline{B})(\overline{A}+B)+\overline{A} = U$

д) $(A+\overline{B})(\overline{A}+B) = A\cdot B+\overline{A}\cdot\overline{B}$

2. A+A+...+A=A вə A·A·A···A=A олдуғуну исбат един.

3. A·B=A мүнасибəти нə вахт мүмкүндүр?

4. Лөвhə үзəриндə 10 консентрик чеврə чəкилмишдир. Бу чеврəлəрин радиуслары $r_1 < r_2 \cdots < r_{10}$ шəртлəрини өдəјир. Атылан күллəнин k радиуслу чеврə дахилинə дүшмəси hадисəси $A_k$ олдугда $B = \sum_{k=1}^{6} A_k$, $C = \prod_{k=5}^{10} A_k$ hадисəлəри нəји ифадə едир?

Ҹаваб: $B=A_6$ ; $C=A_5$ .

5. Əдəдлəр ҹəдвəлиндəн тəсадүфи олараг бир əдəд көтүрүлмүшдүр. Бу əдəдин 5 əдəдинə бөлүнмəси hадисəси A, ахырынчы рəгəминин 0 олмасы hадисəси B олсун. A-B вə $A \cdot \overline{B}$ hадисəлəринин нəји ифадə етдиклəрини мүəјјəнлəшдирин.

Ҹаваб: Сечилмиш əдəдин ахырынчы рəгəминин 5 олмасыны.

6. A вə $\overline{A+B}$ hадисəлəри ујушандырмы?

Ҹаваб: Јох.

7. $\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A \cdot B}$ мүнасибəтинин доғрулуғуну исбат етмəли.

Көстəриш. $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ мүнасибəтиндəн истифадə етмəли.

8. Hансы шəртлəр дахилиндə ашағыдакы мүнасибəтлəр доғрудур?

а) A+B+C=A·B·C ; в) (A+C)-C=A ; с) $A+\overline{A}=A$ ;

е) $A \cdot \overline{A} = A$ .

Ҹаваб: а) A=B=C ; в) A·C=V ; с) A=U ; е) A=V .

9. 1,2,...,30 əдəдлəриндəн ихтијари бири көтүрүлүр. Həмин əдəдин 2-јə бөлүнəн олмасы A, 3-ə

бөлүнән олмасы исә B олсун. A·B вә A+B һадисәләри нәји ифадә едир?

Ҹаваб:A·B һадисәси әдәдин 6-ја, A+B исә онун 2 вә 3 әдәдләриндән һеч олмазса биринә бөлүнән олмасыны көстәрир.

10. A·(B·C)=(A·B)·C мүнасибәтинин доғрулуғуну исбат един.

## 1.2. Еһтималын классик тә"рифи.

### 1. Нәзәри мә"лумат.

Тутаг ки, мүәјјән шәртләр комплексини һәјата кечирдикдә $A_1, A_2, ..., A_n$ һадисәләриндән һеч олмазса бири мүтләг баш верир, белә ки,

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = U .$$

Белә олдугда дејирләр ки, $A_1, A_2, ..., A_n$ һадисәләри там груп әмәлә кәтирирләр.

Фәрз едәк ки, һәр һансы A һадисәсини алмаг үчүн сынаг кечирмәк лазымдыр. Бу сынағын нәтиҹәси ола биләҹәк ејни имканлы ҹүт-ҹүт ујушмајан һадисәләр $(A_1, A_2, ..., A_n)$ там груп әмәлә кәтирирләр. Әкәр бу заман A һадисәси m дәфә баш верә билирсә, онда m-ә A һадисәси үчүн әлверишли һалларын сајы дејилир (бу о демәкдир ки, A һадисәсини сынағын нәтиҹәси ола биләҹәк һадисәләрдән m дәнәсинә ајырмаг мүмкүндүр).

<u>Тә"риф</u>. A һадисәси үчүн әлверишли һаллар сајынын сынағын нәтиҹәси ола биләҹәк бүтүн мүмкүн һаллар сајына нисбәтинә онун еһтималы дејилир.

Демәли,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{әлверишли һалларын сајы}}{\text{бүтүн мүмкүн һалларын сајы}} \qquad (1)$$

Бу тə"риф еһтималын классик тə"рифи адланыр.

Сөјлəдијимиз тə"рифдəн чыхан бə"зи нəтичəлəри гејд едəк.

1. Јəгин һадисəнин еһтималы ваһидə бəрабəрдир: $P(U)=1$.
2. Мүмкүн олмајан һадисəнин еһтималы сыфра бəрабəрдир: $P(V)=0$.
3. Истəнилəн А һадисəси үчүн $0 < P(A) < 1$ .
4. Истəнилəн А һадисəси үчүн $P(A)$ еһтималы $0 < P(A) < 1$ шəртини өдəјəн расионал əдəддир.

5. $P(A)= 1/2$ исə, онда бу һадисəнин баш вермəси вə баш вермəмəси ејни дəрəчəдə мүмкүн олан һадисəлəрдир. $P(A) \geq 1/2$ оларса, онда А һадисəсинин баш вермəси даһа чох еһтималлыдыр.

## 2. Мəсəлə һəлли нүмунəлəри.

Мəсəлə 1. Ушаг үзəриндə Г,Ү,М,Ф,Ш,И һəрфлəри јазылмыш картларла ојнајыр. Онун бу картлары јан-јана gојараг, тəсадүфəн "МҮШФИГ" сөзүнү дүзəлтмəси еһтималы нə гəдəрдир?

Һəлли. Ајдындыр ки, верилмиш 6 һəрфдəн һəр бириндə 6 һəрф олан $P_6$ сајда груп дүзəлтмəк олар. Бунлардан анчаг бириндə "МҮШФИГ" сөзү алындығындан ахтарылан еһтимал

$$P = \frac{1}{P_6} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$$

олар.

Мəсəлə 2. Ə,С,Ə,М,Д -- һəрфлəри илə ојнајан ушағын тəсадүфəн "СƏМƏД" сөзүнү дүзəлтмəси еһтималы нə гəдəрдир?

Һəлли. Верилəн һəрфлəрдəн икиси ејни олдуғундан мүмкүн мүхтəлиф групларын сајы $P_6:P_2=n$ олар. Онда ахтарылан еһтимал

$$P = \frac{1}{n} = \frac{P_2}{P_5} = \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{60}$$

Мәсәлә 3. Гутуда m әдәд ағ, n әдәд гара күрә-чик вардыр (m>2). Гутудан ejни вахтда 2 күрәчик чыхарылыр. Бу күрәчикләрин икисинин дә ағ олмасынын еһтималы нә гәдәрдир?

Һәлли. Гутуда үмумиjjәтлә m+n әдәд күрәчик олдуғундан бүтүн мүмкүн һалларын саjы $C_{m+n}^2$, әлверишли һалларын саjы исә $C_m^2$ олар. Она көрә дә ахтарылан еһтимал

$$P = \frac{C_m^2}{C_{m+n}^2} = \frac{\frac{m(m-1)}{2}}{\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}} = \frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}$$

олур.

Мәсәлә 4. Групда 20 тәләбә вардыр вә онлардан 9 нәфәри гыздыр. Оjнанылан 8 билетдән 5-нин гызларын бәхтинә дүшмәси еһтималы нә гәдәрдир?

Һәлли. 20 нәфәрдән һәр бириндә 8 нәфәр иштирак едән мүхтәлиф групларын саjы $C_{20}^8=n$ олар. Әлверишли һаллар исә елә һаллардыр ки, онларын һәр бириндә 3 оғлан вә 5 гыз олсун. Чәмиси 9 нәфәр гыз олдуғундан һәр бириндә 5 гыз олан мүхтәлиф групларын саjы $C_9^5$ олар. Оғланларын исә үмуми саjы 11-дир. Онда һәр бириндә 3 оғлан олан групларын саjы $C_{11}^3$ олар. Һәр бириндә 3 оғлан һәр бир груп 5 гыздан тәртиб олунмуш һәр бир групла бирләшә билдиjиндән, әлверишли һалларын саjы $m=C_9^5 \cdot C_{11}^3$ олар. Онда еһтималын классик тә"рифинә көрә ахтарылан еһтимал

$$P = \frac{m}{n} = \frac{C_9^5 C_{11}^3}{C_{20}^8} = \frac{147}{323}.$$

Мәсәлә 5. Көтүрүлмүш N машын һиссәсиндән n дәнәси јарарлыдыр. N һиссәдән m дәнәси ајрылыр вә бу m дәнә машын һиссәсиндән к дәнәсинин јарарлы олмасы еһтималыны тапын.

Һәлли. Бүтүн мүмкүн һалларын сајы $m = C_N^m$. Әлверишли һалларын сајыны тапаг. Ајрылмыш m дәнә һиссәдән к дәнәси јарарлы, m-к дәнәси јарарсыз олмалыдыр. Демәли, $C_N^k \cdot C_{N-m}^{m-k}$ сајда мүхтәлиф белә груп дүзәлтмәк олар. Онда классик тә"рифә көрә ахтарылан еһтималы тапарыг:

$$P = \frac{C_N^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$$

Мәсәлә 6. 6 рәгәмли телефон нөмрәсинин бүтүн рәгәмләринин мүхтәлиф олмасынын еһтималы нә гәдәрдир?

Һәлли. Телефон нөмрәләри 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 рәгәмләриндән дүзәлдилдијиндән бүтүн мүмкүн һалларын сајы $n = 10^6$ олар. Әлверишли һалларын сајы исә $m = A_{10}^6$ олдуғундан ахтарылан еһтималы

$$P = \frac{A_{10}^6}{10^6} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{10^6} = 0{,}1512$$

олур.

## 3. Сәрбәст ишләмәк үчүн мәсәләләр.

1. Гутуда бир-бириндән анчаг рәнкләри илә фәргләнән 10 гара вә 5 ағ күрәчик вардыр. Гутудан тәсадүфән чыхарылмыш күрәчијин: 1) гара олмасынын; 2) ағ олмасынын еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: 1) P=2/3; 2) P=1/3.

2. Гутуда 6 ағ, 4 гара, 10 гырмызы күрәчик вардыр. Гутудан чыхарылан ихтијари күрәчијин: 1) гырмызы олмасы; 2) гара олмамасы еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: 1) P=0,5 ; 2) P=0,8 .

3. Јохлама үчүн ајрылмыш 500 машын һиссәсиндән 10 дәнәси стандарта ујғун дејил. Көтүрүлмүш ихтијари бир машын һиссәсинин: 1) стандарта ујғун олмамасы; 2) стандарта ујғун олмасы еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: 1) P=0,02 ; 2) P=0,98 .

4. Лотарејада ојналынан 1000 билетдән 500-ү удушлу, 500-ү исә удушсуздур. Алынмыш 2 билетин һәр икисинин удушлу олмасы еһтималы нә гәдәрдир?

$$\text{Чаваб: } P = \frac{499}{1998} \approx 0{,}22$$

5. Група 25 тәләбә охујур. Јохлама јазы иши заманы онларын 4 нәфәри "ә'ла", 9 нәфәри "јахшы", 7 нәфәри "кафи" гијмәт алмышдыр. Лөвһәјә чағрылмыш 3 тәләбәнин һамысынын "гејри-кафи" гијмәт алан олмасынын еһтималы нә гәдәрдир?

$$\text{Чаваб: } P = \frac{1}{230}$$

6. Бир нәфәр достунун телефон нөмрәсинин ахырынчы ики рәгәмини унудур. Бу рәгәмләрин мүхтәлиф олдуғуну биләрәк о, ихтијари рәгәмләр јығыр. Јығылмыш ики рәгәмин мәһз лазым олан рәгәмләр олмасынын еһтималы нә гәдәрдир?

$$\text{Чаваб: } P = \frac{1}{A_{10}^{2}} = \frac{1}{90}$$

7. Група охујан 25 тәләбәдән 5 нәфәри гыздыр. Бу групдан 3 нәфәр конфранса нүмајәндә сечилмәлидир. Бүтүн тәләбәләрин ејни сечилмә

имканына малик олдуғуну биләрәк, нүмајәндәләрдән 2 нәфәринин гыз вә 1 нәфәринин оғлан олмасынын еһтималы нә гәдәрдир?

$$Чаваб:\ P = \frac{C_5^2 \cdot C_{20}^1}{C_{25}^3} = 0,087 .$$

8. Јығма сехинә I автоматдан 1500, II автоматдан исә 1000 машын һиссәси кәтирилмишдир. Мә"лумдур ки, I автоматын мәһсулунун 0,2%-и II авто-матын мәһсулунун исә 0,3%-и јарарсыз олур. Јығычы устанын әлинә дүшән машын һиссәсинин јарарсыз олма еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: $P = 0,0024$ .

9. 20 әдәд китаб ихтијари гајдада рәфә дүзүлмүшдүр. Бунлардан мә"лум 5 дәнәсинин ардычыл олараг дүзүлмәси еһтималы нә гәдәрдир?

$$Чаваб:\ P = \frac{16!\ 5!}{20!} .$$

10. Јарыша чыхмыш 8 идманчыдан мә"лум үчүнүн мүкафата лајиг јерләрә чыхмасы еһтималы нә гәдәрдир?

$$Чаваб:\ P = \frac{3}{14}$$

11. Емалатханада ишләјән 12 устадан 3-ү гадындыр. Һәр нөвбәдә 8 уста ишләмәлидирсә, ихтијари сечилмиш нөвбәдә ишләјән усталарын икисинин гадын олмасы еһтималы нә гәдәрдир?

$$Чаваб:\ P = \frac{C_3^2 \cdot C_9^6}{C_{25}^3} = \frac{28}{55} .$$

12. Һәр лотарејанын гијмәти m манат олмагла n манатлыг лотареја бурахылмышдыр. Удуш заманы $l$ әдәд билетә гијмәтли удушлар дүшмүшдүр. Әлдә олан 1 билетин удушлу олмасы еһтималы нә

гәдәрдир?

$$\text{Чаваб:}\quad P = \frac{ml}{n}.$$

13. Заводда һазырланан машын һиссәләринин n дәнәси кејфијјәтли, m дәнәси исә кејфијјәтсиздир. Јохлама мәгсәдилә ихтијари s һиссә көтүрүлүр. Јохлама заманы бу һиссәләрдән к дәнәси кејфијјәтли олур. Сонра көтүрүлән һиссәнин кејфијјәтли олмасы һадисәсинин еһтималы нә гәдәрдир?

$$\text{Чаваб:}\ P = \frac{n-k}{n+m-k}.$$

14. Тәсадүфән көтүрүлмүш n там әдәдини а) квадрата јүксәлтдикдә, б) дөрд дәрәчәдә гүввәтә јүксәлтдикдә, в) ихтијари там әдәдә вурдугда ахыры 1-лә гуртаран әдәд алынмасы һадисәсинин еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: а) P = 0,2 ; б) P = 0,4 ; в) P = 0,04

15. Ејни өлчүдә 8 тахта лөвһәнин һәрәсинин үзәринә 2,4,6,7,8,11,12,13 әдәдләриндән бири јазылмышдыр. Көтүрүлмүш ихтијари 2 лөврәнин үзәриндәки әдәдләрин ихтисар олунан кәср әмәлә кәтирмәси һадисәсинин еһтималыны тапын.

$$\text{Чаваб:}\quad P = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}.$$

16. Узунлуглары 1,3,5,7 вә 9 ваһид олан 5 парчадан ихтијари үчү көтүрүлүр. Бу 3 парчанын үчбучаг әмәлә кәтирмәси еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: P = 0,3 .

17. 52 карты олан јығымдан ихтијари үчү көтүрүлмүшдүр. Бу картларын үчлүк, једдилик вә туз олмасы һадисәсинин еһтималы нә гәдәрдир?

$$\text{Чаваб:}\quad P = \frac{C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1}{C_{52}^3}$$

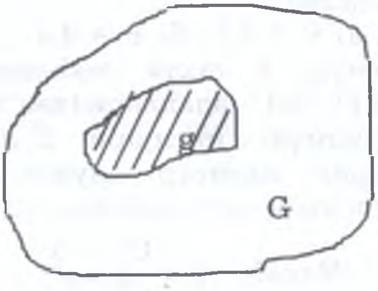
18. 36 карты олан јығымдан ихтијари үчү көтүрүлмүшдүр. Бу картларын әмәлә кәтирдији халлар чәминин 21 олмасы һадисәсинин еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: $n=C_{36}^{3}$, $m=4+2\cdot 4\cdot C_{4}^{2}+4^{3}\cdot 8=564$; $P=0,079$.

## 1.3. Һәндәси еһтимал.

### 1. Нәзәри мә"лумат.

Тутаг ки, мүстәви үзәриндә бир G областы вә онун дахилиндә g областы верилмишдир (шәкил 3). G областындан тәсадүфән көтүрүлмүш ихтијари бир нөгтәнин һәм дә g областына аид олмасы еһтималы нә гәдәрдир?




Шәкил 3.

Бу һалда ахтарылан еһтималы g областынын саһәсинин G областынын саһәсинә нисбәти кими тә"јин едирләр:

$$P=\frac{S_g}{S_G} \qquad (\alpha)$$

G вә g фәза фигурлары олсалар, онда ахтарылан еһтималы g-нин һәчми ($V_g$) илә G-нин һәчминин ($V_G$) нисбәти тә"јин етмәк лазым кәлир:

$$P = \frac{V_g}{V_G} \qquad (\beta)$$

Нәһајәт, g вә G хәтти фигурлар олсалар, онда еһтимал белә һесабланыр:

$$P = \frac{l_g}{l_G} \qquad (\gamma)$$

бурада $l_g$ вә $l_G$ - ујғун олараг g вә G фигурларынын узунлугладыр.

(α), (β) вә (γ) дүстурларынын әвәзинә ашағыдакы үмуми дүстуру јазмаг олар:

$$P = \frac{mes\ g}{mes\ G}.$$

Белә һесабланан еһтимала һәндәси еһтимал дејилир.

2. Мәсәлә һәлли нүмунәләри.

Мәсәлә 1. Әдәд оху үзәриндә [-10,+10] парчасындан көтүрүлмүш ихтијари нөгтәнин [-10,0] парчасындан олмасы еһтималы нә гәдәрдир?

Һәлли. Бурада G=[-10,+10], g=[-10,0]; mes G=10-(-10)=20, mes g=0-(-10)=10. Онда ахтарылан еһтимал (γ) дүстуруна көрә

$$P = \frac{mes\ g}{mes\ G} = \frac{10}{20} = 0{,}5$$

олар.

Мәсәлә 2. Фырланан диск ардычыл олараг ағ, гара вә јашыл рәнкләрлә рәнкләнмиш 30 сектора бөлүнмүшдүр. Атылан күлләнин гара секторлардан биринә дәјмәси еһтималы нә гәдәрдир?

Һәлли. Һәр бир рәнклә рәнкләнмиш саһә

$$S_g = \frac{1}{3}\pi R^2$$

вә дискин саһәси

$$S_G = \pi R^2$$

олдуғундан еһтималын һәндәси тә"рифинә әсасән

$$P = \frac{S_g}{S_G} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2}{\pi R^2} = \frac{1}{3}$$

олар.

Мәсәлә 3. Ики кәми ејни бир дајаначаға јан алмалыдырлар. Кәмиләрин кәлмәси вахты бир күн әрзиндә бир-бириндән асылы олмајараг ејни еһтималлыдыр. Кәмиләрдән биринчисинин дајаначагда 0,5 саат, икинчисинин исә 1,5 саат дајанмаларыны биләрәк, онларын биринин о бирисини көзләмәси еһтималы нә гәдәрдир?

Һәлли. Һәндәси схеми тәтбиг едәк (шәкил 4). Дүзбучаглы (ХОУ) координат системиндә х вә у дәјишәнләринин 0 саатдан 24 саата гәдәр дәјишдијинин гејд едәк. Тутаг ки, х - биринчи, у - исә икинчи кәминин кәлмәси саатыдыр. Онда кәмилә-рин лимана кәлмәсини тәрәфләри $0 \le x \le 24$, $0 \le y \le 24$ олан квадратын нөгтәләри илә көстәрмәк олар. Ајдындыр ки, бу областда (x,y) нөгтәләринин вәзијјәти бәрабәр имканлыдыр. Бизим үчүн әлверишли олан һадисәни - кәмиләрин биринин дикәринин дајаначагдан чыхмасыны көзләмәси һадисәсини А илә ишарә едәк. А һадисәси икинчи кәминини кәлмә вахты аны олан у-ин биринчинин кәлмә аны олан х-дән ән чоху 1,5 саат тез вә ән азы 0,5 саат кеч олдугда баш верир:

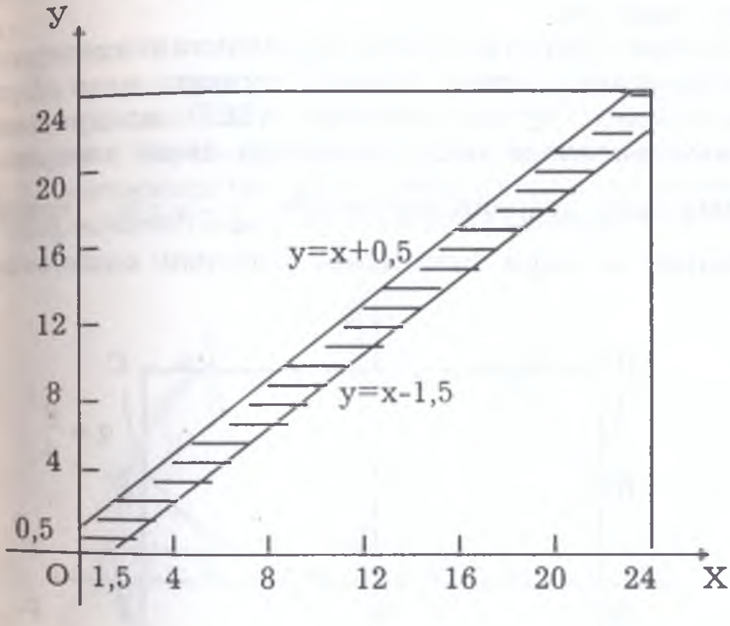
$$x-1,5 < y < x+0,5 \qquad (*)$$

Беләликлә, А һадисәсинин баш вермәси областы квадратын (*) бәрабәрсизлијини өдәјән һиссәсидир. Квадратын саһәси $S_g=24^2=576$ (кв.в.) олдуғундан вә штрихләнмиш һиссәнин саһәси

$$S_g = 576 - \frac{1}{2}(22{,}5^2 + 23{,}5^2) = 47{,}25 \quad \text{(кв.в.)}$$

Бурадан

$$P(A) = \frac{47{,}25}{576} \approx 0{,}082 \ .$$




Шәкил 4.

Мәсәлә 4. Даирә дахилинә бәрабәртәрәфли үчбучаг чәкилмишдир. Ихтијари гејд олунмуш нөгтәнин һәмин үчбучаг дахилинә дүшмәси еһтималы нә гәдәрдир?

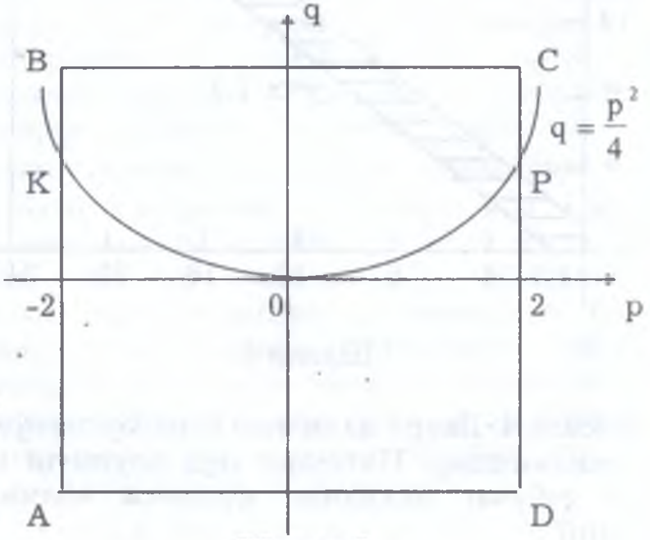
Һәлли. Даирәнин саһәси $S_G=\pi R^2$ вә бәрабәр-тәрәфли үчбучағын саһәси $S_\Delta = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$ олдуғундан, ахтарылан еһтимал $P = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ олар.

Мәсәлә 5. $|p|\leq 2$, $|q|\leq 2$, гијмәтләринин һамысынын јеканә мүмкүн олан вә бәрабәр еһтималлы олдуғуну фәрз едәрәк,

$$x^2+px+q=0$$

тәнлијинин көкләринин һәгиги олмалары еһтималыны тапмалы.

Һәлли. (p,q) чүтләринә мүстәвинин нөгтәләринин координатлары кими бахсаг, мүмкүн олан бүтүн гијмәтләрә ујғун нөгтәләр ABCD квадратынын дахили нөгтәләри олар (шәкил 5). Бизә әлверишли јалныз (p,q) координатларынын $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$ (квадрат тәнлијин көкләри һәгигидир) шәртини өдәмәсидир.




Шәкил 5.

Бу исә AKOPD фигурунун дахили нөгтәләринә ујғун кәлир. Квадратын саһәси $S_G=16$ (кв.в.) олдуғундан вә AKOPD фигурунун саһәси исә

$$S_g = 8 + \int_{-2}^{2} \frac{p^2}{4} dp = \frac{28}{3} \quad \text{(кв.в.)}$$

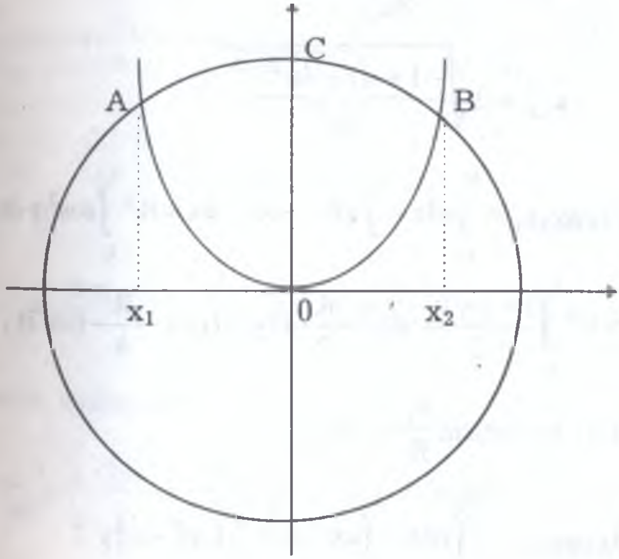
олдуғундан, ахтарылан еһтимал

$$P = \frac{S_g}{S_G} = \frac{7}{12}$$

олар.

Мәсәлә 6. Радиусу R олан даирәви лөвһәјә атылан күлләнин $y=ax^2$ $(a>0)$ параболундан јухары дүшмәси һадисәсинин еһтималы нә гәдәрдир?

Һәлли. Үмумилији позмадан даирәнин мәркәзини G(0,0) нөгтәсиндә көтүрәк. Онда ахтарылан еһтимал G даирәсинин саһәси илә шәкилдә (шәкил 6) штрих-




Шәкил 6.

ләнмиш g фигуру саһәсинин нисбәти кими тә"јин едиләр:

$$P = \frac{S_g}{S_G} \quad .$$

Дикәр тәрәфдән

$$S_g = S_{ACBX_2X_1} - S_{AOBX_2X_1}, \quad S_G = \pi R^2 \quad .$$

$x_1$ вә $x_2$-ни белә тапмаг олар:

$$x^2+y^2=R^2 \ , \quad y=ax^2 \ ;$$

Онда

$$x^2+ax^2=R^2 \ ;$$

$$a^2x^4+x^2-R^2=0 \ ;$$

$$x^2 = \frac{-1+\sqrt{1+4a^2R^2}}{2a^2} \ ;$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4a^2R^2}}{2a^2}} \ ;$$

$$S_{ACBX_2X_1} = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{R^2 - x^2}\ dx = R^2 \int_{t_1}^{t_2} \cos^2 t\, dt =$$

$$= R^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{1+\cos 2t}{2}\ dt = \frac{R^2}{2}(t_2 - t_1) + \frac{R^2}{4}(\sin 2t_2 - \sin 2t_1)$$

бурада $t_1 = -\arcsin\frac{x_1}{R} = -t_2$ .

$$S_{AOBX_2X_1} = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \int_{x_1}^{x_2} ax^2\ dx = \frac{a}{3}(\ x_2^3 - x_1^3) \quad .$$

Демәли,

$$S_g = \frac{R^2}{2}(t_2 - t_1) + \frac{R^2}{4}(\sin 2t_2 - \sin 2t_1) - \frac{a}{3}(x_2^3 - x_1^3) \quad .$$

Дикәр тәрәфдән,

$$\sin 2t_1 = \sin 2(-\arcsin\frac{x_1}{R}) = -\sin 2(\arcsin\frac{x_1}{R}) =$$

$$= -2\sin(\arcsin\frac{x_1}{R})\cdot\cos(\arcsin\frac{x_1}{R}) = -2\frac{x_1}{R}\sqrt{1-\frac{x_1^2}{R^2}}$$

$$\sin 2t_2 = -\sin 2t_1 = 2\frac{x_1}{R}\sqrt{1-\frac{x_1^2}{R^2}}$$

Онда:

$$S_g = \frac{R^2}{2}(\arcsin\frac{x_2}{R} - \arcsin\frac{x_1}{R}) + \frac{R^2}{4}\cdot 2\frac{x_1}{R}\cdot\sqrt{1-\frac{x_1^2}{R^2}} -$$

$$-\frac{a}{3}(x_2^3 - x_1^3) \quad .$$

$x_2 = -x_1$ ;

$$S_g = \frac{2ax_1^3}{3} + \frac{Rx_1}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{x_1^2}{R^2}} - R^2\arcsin\frac{x_1}{R} \quad .$$

Беләликлә, алырыг:

$$P = \frac{S_g}{S_G} = \frac{1}{\pi R^2}\cdot\left(\frac{2ax_1^3}{3} + \frac{Rx_1}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{x_1^2}{R^2}} - R^2\arcsin\frac{x_1}{R}\right) \quad .$$

3. Сәрбәст ишләмәк үчүн мәсәләләр.

1. Фырланан R радиуслу даирәви лөвһә дахилиндә r радиуслу (r<R) даирә рәнкләнмишдир. Атылан күлләнин даирәви лөврәнин рәнкләнмиш һиссәсинә дәјмәси еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: $P = \frac{r^2}{R^2}$

2. R радиуслу даирә дахилинә квадрат чәкилмишдир. Тәсадүфи гејд олунмуш нөгтәнин квадрата аид олмасы еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: $P = \frac{2}{\pi}$

3. Фәһлә ики дәзкаһа нәзарәт едир. Узун мүддәт әрзиндә тә"јин едилиб ки, һәр бир дәзкаһ бир саат әрзиндә 12 дәгигә фәһләнин вахтыны алыр. Бир саат әрзиндә фәһләнин бир дәзкаһла мәшғул олдугда о бири дәзкаһын фәһләнин нәзарәт етмәсинә еһтијачы олмасы еһтималыны тапмалы (Дәзкаһларын һәр биринин дајанмасы бир саат әрзиндә ихтијари анда баш верә биләр вә онларын дајанмалары бир-бириндән асылы дејил.).

Чаваб: $P = \frac{60^2 - 48 \cdot 48}{60^2} = \frac{9}{25}$.

4. (Көрүш һаггында мәсәлә). Ики тәләбә саат 15 илә 16 арасында мүәјјән јердә көрүш тә"јин едир. Ким көрүш јеринә тез кәлсә, о бирини t дәг. көзләдикдән сонра кетмәлидир. Онларын шәртләнилән мүддәтдә кәлмәләри тәсадүфи вә кәлмә аны бир-бириндән асылы олмамаг шәртилә көрүшә билмәләри еһтималыны тапмалы.

Чаваб: $P = \frac{60^2 - (60 - t)^2}{60^2}$ .

5. Фырланан даирәви лөвһә ардычыл олараг гырмызы, мави, јашыл вә рәнкләрлә 4к сајда секторлара бөлүнмүшдүр. Атылан күлләнин јашыл рәнкләнмиш секторларын биринә дәјмәси еһтималыны тапмалы.

Чаваб: $P = \frac{0,25 \cdot \pi R^2}{\pi R^2} = 0,25$ .

6. Тәрәфи a олан квадратын дахилинә тәпәләри верилмиш квадратын тәрәфләринин ортасында олан квадрат чәкилмишдир. Бөјүк квадрат дахилиндә тәсадүфи гејд олунмуш нөгтәнин кичик квадрат дахилинә дүшмәси еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: P = 0,5 .

7. Радиуслары kr (k=1,2,3,4,5) олан беш консентрик чеврә чәкилмишдир. Радиусу r олан даирә вә харичи һадиуслары 3r вә 5r олан һалгалар чызыгланмышдыр. Радиусу 5r олан даирә дахилиндә көтүрүлмүш тәсадүфи нөгтәнин:

а) 2r һадиуслу даирә дахилиндә;

б) чызыгланмыш областда олмасы һадисәсинин еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: а) P=0,16 ; б) P=0,6 .

8. Мүстәви бир-бириндән 2a мәсафәдә јерләшән паралел дүз хәтләрлә чызыгланмышдыр. Мүстәвинин үзәринә радиусу r< a олан пул атылыр. Бу пулун дүз хәтләрин һеч бири илә кәсишмәмәсинин еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: $P = \frac{2a - 2r}{2a} = \frac{a - r}{a}$ .

9. G фигуру $y=8-x^2$ вә $y=0$ хәтләри илә, g исә $y=x^2$ вә $y=8-x^2$ хәтләри илә һүдудланмышдыр. G

фигуру дахилинә атылан ихтијари нөгтәнин g фигуру дахилинә дүшмәси еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: $S_g = 21\frac{1}{3}$ кв.в., $S_G = \frac{64\sqrt{2}}{3}$ кв.в., $P = \frac{S_g}{S_G} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

10. G фигуру $y=6x-x^2$ вә $y=0$ хәтләри илә һүдудланмыш $G_1$ фигурунун, g исә $y=6x-x^2$ вә $x+y-6=0$ хәтләри илә һүдудланмыш $g_1$ фигурунун абсис оху әтрафында фырланмасындан алыныр. G дахилинә атылан нөгтәнин g дахилинә дүшмәси еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: $V_g = 208\frac{1}{3}\pi$ куб ваһид, $V_G = 259\frac{1}{5}\pi$ куб ваһид,

$$P = \frac{V_g}{V_G}.$$

Көстәриш. $V_g$ вә $V_G$ һәчмләрини фырланма чисминин һәчмини тапмаг үчүн мә"лум олан

$$V = \int_a^b y^2 dx$$

дүстуру васитәси илә һесабламалы.

11.Тәсадүфи олараг көтүрүлмүш ики мүсбәт x вә y әдәдләриндән һәр бири икини ашмыр. xy һасилинин ваһиддән бөјүк, $\frac{x}{y}$ нисбәтинин исә икидән бөјүк олмамасы еһтималыны тапын.

## 1.4. Еһтималларын топланмасы вә вурулмасы.

### 1. Нәзәри мә"лумат.

1. A вә B ујушмајан һадисәләр олдугда

$$P(AUB) = P(A)+P(B), \qquad (1)$$

ихтијари һадисәләр олдугда исә

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \vee B) \quad . \qquad (2)$$

2. Ихтијари А вә В һадисәләри үчүн

$$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P_A(B)=P(B) \cdot P_B(A) \quad , \qquad (3)$$

асылы олмајан һадисәләр үчүн исә

$$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B) \qquad (4)$$

дүстурлары доғрудур.

$A_1,A_2,...,A_n$ һадисәләри үчүн (3) вә (4) дүстурлары белә јазылыр:

$$P(A_1,A_2,\ldots,A_n) =$$

$$=P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1A_2}(A_3) \cdots P_{A_1A_2\ldots A_{n-2}}(A_n) \qquad (3')$$

$$P(A_1,A_2,...,A_n)=P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n) \qquad (4')$$

$$3. \; P_A(B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} \qquad (5)$$

дүстуру илә һесабланан еһтимала шәрти еһтимал дејилир (А һадисәси баш вермәк шәртилә В һадисәсинин еһтималы).

2. Мәсәлә һәлли нүмунәләри.

Мәсәлә 1. Уста 5 дәзкаһа нәзарәт едир. Иш вахтынын 20%-ни биринчи дәзкар гаршысында, 10%-ни икинчинин, 15%-ни үчүнчүнүн, 25%-ни дөрдүнчүнүн вә нәһајәт, 30%-ни бешинчинин гаршысында кечирир. Ихтијари сечилмиш анда устанын: 1) биринчи вә ја үчүнчү; 2) икинчи вә ја бешинчи; 3) биринчи вә ја дөрдүнчү; 4) биринчи вә ја икинчи вә ја үчүнчү; 5) дөрдүнчү вә ја бешинчи дәзкаһлар гаршысында олмасы еһтималларыны һесабламалы.

Һәлли. Ихтијари сечилмиш анда устанын биринчи, икинчи, үчүнчү, дөрдүнчү вә бешинчи дәз-каһлар гаршысында олмасы һадисәләрини ујғун олараг A,B,C,D,E илә ишарә едәк. Мәсәләнин шәртиндән көрүнүр ки, A,B,C,D,E һадисәләри чүт-чүт ујушмајан һадисәләрдир вә $P(A)=0{,}20$; $P(B)=0{,}10$; $P(C)=0{,}15$; $P(D)=0{,}25$; $P(E)=0{,}30$ .

1) A+C һадисәси устанын биринчи вә ја үчүнчү дәзкаһ гаршысында олмасы һадисәсидир. Онда $P(A+C)$ еһтималыны һесабламаг лазымдыр. (1) дүс-туруна көрә

$$P(A+C)=P(A)+P(C)=0{,}20+0{,}15=0{,}35 ;$$

2) $P(B+E)=P(B)+P(E)=0{,}10+0{,}30=0{,}40$ ;

3) $P(A+D)=P(A)+P(D)=0{,}20+0{,}25=0{,}45$ ;

4) $P(D+E)=P(D)+P(E)=0{,}25+0{,}30=0{,}55$

олар.

Мәсәлә 2. Гутуда 20 күрәчик вар вә бунларын беши рәнклидир. Ихтијари олараг 3 күрәчик көтү-рүлүр. Бу күрәчикләрин һеч олмазса биринин рәнкли олмасы (A һадисәси) еһтималыны тапмалы.

Һәлли. I үсул. Һеч олмазса бир күрәчијин рәнкли олмасы һадисәсини - A, бир күрәчијин рәнк-ли олмасы һадисәсини - B, икисинин рәнкли олмасы һадисәсини - C, һәр үчүнүн рәнкли олмасы һадисә-сини - D илә ишарә едәк. Ашкардыр ки, A һадисәси B, C вә D һадисәләринин һәр һансы бири баш вердикдә баш верә биләр вә B,C,D һадисәләри чүт-чүт ујушмајан һадисәләр олдуғундан, ујушма-јан һадисәләр үчүн олан топлама теореминә көрә

$$A=B+C+D$$

олдуғундан

$$P(A)=P(B)+P(C)+P(D) \qquad (6)$$

јаза биләрик.

B,C,D һадисәләринин еһтималларыны һесаблајаг.

$$P(B)=\frac{C_5^1\cdot C_{15}^2}{C_{20}^3}=\frac{35}{76},$$

$$P(C)=\frac{C_5^2\cdot C_{15}^1}{C_{20}^3}=\frac{5}{38},$$

$$P(D)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{1}{114}.$$

Еһтималларын алынан гијмәтләрини (6) бәрабәрлијиндә јеринә јазсаг, аларыг ки,

$$P(A)=\frac{35}{76}+\frac{5}{38}+\frac{1}{114}=\frac{137}{228}.$$

II үсул. Көтүрүлән үч күрәчикдән һеч олмазса биринин рәнкли олмасы A һадисәси вә көтүрүлән күрәчикләрин һеч биринин рәнкли олмамасы $\overline{A}$ һадисәси гаршылыглы әкс һадисәләр олдуғундан

$$P(A)+P(\overline{A})=1,$$

бурадан исә

$$P(A)=1-P(\overline{A}),$$

олур.

$\overline{A}$ һадисәсинин (күрәчикләрин һеч биринин рәнкли олмамасы) баш вермәси еһтималы

$$P(\overline{A})=\frac{C_{15}^3}{C_{20}^3}=\frac{91}{228}$$

олдуғундан, ахтарылан еһтимал

$$P(A)=1-\frac{91}{228}=\frac{137}{228}$$

Мәсәлә 6. Биринчи гутуда 2 ағ вә 10 гара күрәчик, икинчи гутуда исә 8 ағ вә 4 гара күрәчик вардыр. Тәсадүфи олараг һәр гутудан бир күрәчик чыхарылыр. Бу күрәчикләрин һәр икисинин аг олмасы еһтималыны тапмалы.

Һәлли. А - I гутудан чыхарылан күрәчијин ағ олмасы, В - II гутудан чыхарылан күрәчијин ағ олмасы һадисәси олсун. Онда һәр ики күрәчијин ағ олмасы А вә В һадисәләринин ејни заманда баш вермәсидир. А вә В һадисәләри асылы һадисәләр олмадығындан

$$P(A)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}, \quad P(B)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

вә (4) дүстуруна әсасән:

$$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)=\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}=\frac{1}{9}$$

олур.

Мәсәлә 7. Група 25 тәләбәдән 15 нәфәри ә"лачы, 10 нәфәри исә орта охујандыр. Конфранса 3 нәфәр тәләбә сечилмишдир. Бу тәләбәләрин һәр үчүнүн ә"лачы олмасы еһтималы нә гәдәрдир?

Һәлли. Сечилән I,II,III тәләбәнин ә"лачы олмасы һадисәсини ујғун олараг $A_1, A_2, A_3$ илә ишарә едәк. Онда ахтарылан $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = A$ һадисәсинин еһтималы

$$P(A)=P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1A_2}(A_3)$$

олар.

Група 25 нәфәрдән 15-и ә"лачы олдуғундан

$$P(A_1)=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$$

олар.

Инди тутаг ки, $A_1$ һадисәси баш вермишдир. Бу шәрт дахилиндә $A_2$-нин еһтималыны тапаг:

$$P_{A_1}(A_2)=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}\quad .$$

Нәһајәт, фәрз едәк ки, $A_1$ вә $A_2$ һадисәләринин һәр икиси баш вермишдир. Бу шәрт дахилиндә $A_3$-үн баш вермәси еһтималыны тапаг:

$$P_{A_1A_2}(A_3)=\frac{13}{23}\quad .$$

Онда вурма теореминә көрә ( (3) дүстуру) јазарыг:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{13}{23}=\frac{91}{460}\quad .$$

Мәсәлә 8. Гутуда 10 гара, 8 гырмызы күрәчик вардыр. Бу гутудан ардычыл ики дәфә күрәчик чыхарылыр вә I дәфә чыхарылан күрәчик гутуја гајтарылмыр. I күрәчијин гара олмасыны биләрәк ($A_1$), II күрәчијин дә гара олмасы ($A_2$) еһтималыны тапын.

Һәлли. I күрәчик чыхарылдыгдан сонра гутуда 17 күрәчик галыр ки, бунларын да 9-у гарадыр. II сынагда чыхарылачаг күрәчијин гара олмасы һадисәсинин еһтималы белә тапылыр:

$$P_{A_1}(A_2)=\frac{9}{17}\quad .$$

## 3. Сәрбәст ишләмәк үчүн мәсәләләр.

1. Ујушмајан дөрд һадисәнин һәр бири ујғун олараг 0,012; 0,010; 0,006 вә 0,002 еһтималлары илә баш верә биләрләр. Сынаг нәчәсиндә бу һадисәләрин һеч олмазса биринин баш вермә еһтималыны тапын.

Чаваб: 0,03 .

2. Мәркәзи даирә вә ики консентрик һәлгәдән ибарәт олан һәдәфә атәш ачылыр. Атылан бир күлләнин бу һиссәләрә дәјмәси еһтималы, ујгун

оларағ 0,20; 0,15 вә 0,10-дур. 1 атәш заманы күлләнин һәдәфә дәјмәси еһтималы нә гәдәрдир?

Ҹаваб: 0,45 .

3. Фуадын кисәсиндә 10 дәнә 20 гәпиклик,5 дәнә 15 гәпиклик, 2 дәнә 10 гәпиклик вардыр. Кисәдән тәсадүфи јолла 6 дәнә пул көтүрүлүр. Бу пулларын ҹәминин 1 манатдан артыг олмамасынын еһтималыны тапмалы.

Ҹаваб:

$$P=1-\frac{1}{C_{17}^{6}}\left(C_{10}^{6}+C_{10}^{5}C_{5}^{1}+C_{10}^{5}C_{2}^{1}+C_{10}^{4}C_{5}^{2}+C_{10}^{4}C_{5}^{1}C_{2}^{1}+C_{10}^{3}C_{5}^{3}\right)\approx 0,4$$

4. $A\subset B$ олдугуну биләрәк $P(A)\leq P(B)$ олдуғуну исбат един.

5. Китабханада али ҹәбрдән 6 китаб вардыр, бунлардан үчү ҹилдлидир. Китабханачы бунлардан ихтијари икисини көтүрүр. Бу китабларын һәр икисинин ҹилдли олмасынын еһтималы нә гәдәрдир?

Ҹаваб: 0,2 .

6. Кәдәбәјдә ијул ајында јағынтылы күнләрин сајы орта һесабла 6-дыр. Ијул ајынын 1-дә вә 2-дә Кәдәбәјдә јағынты олмајачағынын еһтималы нә гәдәрдир?

Ҹаваб: $P=\frac{25}{31}\cdot\frac{24}{30}=\frac{20}{31}$

7. Тәләбә 30 суалдан 25-ни билир. Тәләбәнин мүәллимин вердији үч суалдан үчүнү дә билмәси еһтималы нә гәдәрдир?

Ҹаваб: $P=\frac{25}{30}\cdot\frac{24}{29}\cdot\frac{23}{28}=\frac{115}{203}$ .

8. Гутуда 10 дәнә карандаш вар, бунлардан исә 6 дәнәси гырмызыдыр. Шакирд гутудан ихтијари 4 карандаш чыхарырыр. Онларын һамысынын гырмызы олмасы еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: $P=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{1}{14}$ .

9. $P(A\cdot B)=0{,}72$ вә $P(A\cdot\overline{B})=0{,}18$ олдуғуну биләрәк, $P(A)$ еһтималыны тапын.

Чаваб: $P(A)=0{,}9$ .

Көстәриш: $A=AB\cup A\overline{B}$ .

10. $P(A)=a$, $P(B)=в$, $P(A+B)=c$ олдуғуну биләрәк, $P(A\cdot\overline{B})$ еһтималыны тапын.

Чаваб: $P(A\cdot\overline{B})=c-в$ .

Көстәриш: $P(A\cdot\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-[P(A)+P(B)-$
$-P(A+B)]=P(A+B)-P(B)$.

11. Исбат етмәли ки,

$$P_B(A)>P(A)$$

исә, онда

$$P_A(B)>P(B)\ .$$

12. $P(A)>0$ олдугда

$$P_A(A)\geq 1-\frac{P(\overline{B})}{P(A)}$$

олдуғуну исбат един.

13. $ABC\subset D$ олдуғуну биләрәк,

$$P(A)+P(B)+P(C)-P(D)\leq 2$$

олдуғуну исбат един.

Көстәриш: $P(D)\geq P(ABC)$ олдуғундан верилән бәрабәрсизлик әвәзинә $P(A)+P(B)+P(C)-P(ABC)\leq 2$ олдуғуну исбат етмәк кифајәтдир.

14. Ихтијари A,B,C һадисәләри үчүн

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-$$
$$-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

олдуғуну исбат един.

...н атычы бир-бириндән асылы олмајараг ...атәш ачырлар. Биринчи атычы үчүн һәдәфи

вурма еhтималы 0,6; икинчи үчүн 0,7 вә үчүнчү үчүн 0,75-дир. Атычыларын hәрәси бир атәш ачарса, hеч олмазса биринин hәдәфи вурмасы еhтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: $P=0,97$ .

16. Фәhлә үч дәзкаhа хидмәт едир. I дәзкаh үчүн 1 саат әрзиндә фәhләнин нәзарәти олмадан ишләмә еhтималы 0,9; II дәзкаh үчүн 0,8 вә III дәзкаh үчүн 0,85-дир. 1) Һәр hансы саат әрзиндә hәр үч дәзкарын фәhләнин нәзарәти олмадан ишләмәсинин, 2) Һәр үч дәзкаhын фәhләнин нәзарәтини тәләб етмәси еhтималыны тапын.

Чаваб: 1) $P=0,6120$ ; 2) $P=0,003$ .

17. Ики силаhдан hәдәфә ејни вахтда атәш ачылыр. I силаhдан hәдәфин вурулмасы еhтималы 0,85; II-дән вурулмасы еhтималы исә 0,91-дир. Һәдәфин вурулмасы еhтималыны тапын.

Чаваб: $P=0,9865$ .

18. Истилик електрик стансијасында ишләјән 15 нөвбә мүhәндисиндән 3-ү гадындыр. Нөвбәдә 3 нәфәр мәшғулдур. Ихтијари сечилмиш нөвбәдә ишләјән мүрәндисләрдән ән азы 2 нәфәринин киши олмасы-нын еhтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: $P=0,9187$ .

## 1.5. Там еhтимал вә Бајес дүстуру.

### 1. Нәзәри мә"лумат.

1. Тутаг ки, A hадисәси там груп тәшкил едән вә ујушмајан $A_1,A_2,...,A_n$ hадисәләрдән биринин баш вермәси шәрти дахилиндә баш верә билир. Әкәр $A_1,A_2,...,A_n$ hадисәләринин вә $P_{A_1}(A), P_{A_2}(A), ..., P_{A_n}(A)$ шәрти еhтималларын мә"лум олдуғуну биләрәк, A hадисәсинин баш вермә еhтималыны .

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \cdot P_{A_k}(A) \qquad (1)$$

дүстуру васитәсилә тапмаг олур. (1) дүстуруна там еһтимал дүстуру дејилир.

2. Тутаг ки, А һадисәси мүхтәлиф шәртләр дахилиндә баш верә биләр вә бу шәртләр һаггында n фәрзијјә етмәк мүмкүндүр: $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Бу вә ја дикәр сәбәбләр үзүндән бу фәрзијјәләрин $P(A_к)$ (к=1,2,...,n) еһтималлары сынаға гәдәр бизә мә"лумдур. Еләчә дә мә"лумдур ки, $A_к$ һадисәси А һадисәсинә $P_{A_k}(A)$ (к=1,2,...,n) еһтималыны верир. Инди фәрз едәк ки, сынаг апарылмыш вә нәтичәдә А һадисәси алынмышдыр. Бу һалда $A_к$ фәрзијјәсинин еһтималы нечә дәјишмәлидир?

Бу мәсәлә кәмијјәт чәһәтдән Бајес дүстуру адланан ашағыдакы дүстурла һесабланыр:

$$P_A(A_k) = \frac{P(A_k) \cdot P_{A_k}(A)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \cdot P_{A_k}(A)}, \quad (к=1,2,...,n). \qquad (2)$$

2. Мәсәлә һәлли нүмунәләри.

Мәсәлә 1. Жигули машынлары үчүн шинләр үч заводда һазырланыр. I завод бүтүн шинләрин 50%-ни, II завод 30%-ни, III завод исә 20%-ни истеһсал едир. Белә ки, I заводун һазырладығы шинләрдән орта һесабла 0,025-и, II заводун һазырладығы шинләрдән орта һесабла 0,02-и вә нәһајәт, III заводун һазырладығы шинләрдән орта һесабла 0,015-и стандарта ујғун кәлмир. Дүкандан алынмыш ихтијари бир әдәд шинин стандарта ујғун олмасынын еһтималы нә гәдәрдир?

Һәлли. $A_1, A_2, A_3$ илә шинин I, II, III заводда истеһсал олунмасы һадисәләрини ишарә етсәк, шәртә көрә $P(A_1)=0{,}5$; $P(A_2)=0{,}3$ вә $P(A_3)=0{,}2$ олар. Шинин стандарта ујғун олмасы һадисәсини A илә ишарә етсәк, ајры-ајры заводлар үчүн шәрти еһтималлары тапа биләрик:

$$P_{A_1}(A)=0{,}975\ ;$$
$$P_{A_2}(A)=0{,}98\ ;$$
$$P_{A_3}(A)=0{,}985\ .$$

Демәли,

$$P(A_1)\cdot P_{A_1}(A)=0{,}5\cdot 0{,}975=0{,}4875\ ;$$
$$P(A_2)\cdot P_{A_2}(A)=0{,}3\cdot 0{,}98=0{,}294\ ;$$
$$P(A_3)\cdot P_{A_3}(A)=0{,}2\cdot 0{,}985=0{,}197\ .$$

Онда (1) там еһтимал дүстуруна көрә јаза биләрик:

$$P(A)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(A)+P(A_3)\cdot P_{A_3}(A)=$$
$$=0{,}4875+0{,}294+0{,}197=0{,}9785\ .$$

Мәсәлә 2. Биринчи група 15 нәфәрдән 4-ү, икинчи група исә 20 нәфәрдән 6-сы ә"лачыдыр. Ихтијари групдан ихтијари 1 нәфәр сечилир. Бу сечилмиш тәләбәнин ә"лачы олмасы еһтималы нә гәдәрдир?

Һәлли. Сечилмиш групун I олмасыны $A_1$, II олмасыны исә $A_2$ илә ишарә едәк. Онда $P(A_1)=\frac{1}{2}$, $P(A_2)=\frac{1}{2}$ олар. I групдан сечилән 1 нәфәрин ә"лачы олмасы еһтималы $P_{A_1}(A)=\frac{4}{15}$, II групдан сечилән 1

нәфәрин ә"лачы олмасы еһтималы $P_{A_2}(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$ олар. Онда сечилмиш бир нәфәрин ә"лачы олмасы (A) һадисәсинин ертималы (1) там еһтимал дүстуру илә тапылыр:

$$P(A)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(A)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}=\frac{2}{15}+\frac{3}{20}=\frac{8+9}{60}=\frac{17}{60}\ .$$

Мәсәлә 3. Тутаг ки, биринчи мәсәләнин шәртләри дахилиндә, алынмыш шинин стандарта ујғун олдуғу мә"лумдур. Һәмин шинин I заводун мәһсулу олмасы еһтималы нә гәдәрдир?

Һәлли. $P(A_1)=0{,}5$ ; $P_{A_1}(A)=0{,}975$ ;

$P(A_2)=0{,}3$ ; $P_{A_2}(A)=0{,}98$ ;

$P(A_3)=0{,}2$ ; $P_{A_3}(A)=0{,}985$ ;

$P(A)=0{,}9785$

олдуғундан (2) Бајес дүстуруна көрә јаза биләрик:

$$P_A(A_1)=\frac{P(A_1)\cdot P_{A_1}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}975}{0{,}9785}=0{,}498\ .$$

3. Сәрбәст ишләмәк үчүн мәсәләләр.

1. 4 ғуту вардыр. I ғутуда 1 ағ вә 1 гара , II-дә 2 ағ вә 3 гара. III-дә 3 ағ вә 5 гара, нәһајәт, IV-дә 4 ағ вә 7 гара күрәчик вардыр. I гутунун сечилмәси - $A_1$, II, III, IV - ғутунун сечилмәси һадисәси, ујғун олараг $A_2$, $A_3$, $A_4$ олсун вә фәрз едәк ки, $P(A_1)=\frac{1}{10}$, $P(A_2)=\frac{1}{5}$, $P(A_3)=\frac{3}{10}$, $P(A_4)=\frac{2}{5}$. Бәхтә-бәхт бир гуту

көтүрүлүр вә һәмин гутудан 1 күрәчик чыхарылыр. Һәмин күрәчијин ағ олмасынын еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: $P(A)=\frac{1707}{4400}$

2. Јығма сехинә үч автоматдан һиссәләр дахил олур. Мә"лумдур ки, I автомат 0,3%, II - 0,2%, III-0,4% зај мәһсул верир. I автоматдан 1000, II автоматдан 2000, III автоматдан исә 2500 һиссә дахил олдуғуну биләрәк, јығма сехинә јарарсыз һиссәнин дахил олмасы еһтималыны тапын.

Чаваб: P=0,0031 .

3. Тәјјарәјә 3 тәк атәш ачылыр. I атәш заманы тәјјарәнин вурулмасы еһтималы 0,5 , II атәш заманы вурулмасы еһтималы 0,6 вә III атәш заманы вурулмасы еһтималы 0,8-дир. Тәјјарәни сырадан чыхармаг үчүн үч дәфә мәрминин дәјмәси кифајәтдир. Бир мәрми дәјмәси илә тәјјарәнин сырадан чыхмасы еһтималы 0,3 , ики мәрми илә онун сырадан чыхмасы еһтималы исә 0,6-дыр. 3 атәш нәтичәсиндә тәјјарәнин вурулмасы (сырадан чыхмасы) еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: P=0,588 .

4. Үзәриндә бензин долдурма мәнтәгәси нишаны олан шоссе јолу илә кечән јүк машынларынын сајынын миник машынларынын сајына нисбәти 3:2 кимидир. Јүк машынынын бензин көтүрмә еһтималы 0,1 вә миник машынынын бензин көтүрмә еһтималы 0,2-дир. Бензин долдурма мәнтәгәсинә бир машын

кәлди. Бу машынын јүк машыны олмасынын еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: $P=\frac{3}{7}$ .

5. Бир-бириндән асылы олмадан ишләјән 3 һесаблајычы гурғудан икиси хараб олду. I, II вә III елементләрин хараб олмасынын еһтималы, ујғун олараг 0,2; 0,4 вә 0,3 олдуғуну биләрәк I вә II гурғунун хараб олдуғу еһтималы тапын.

Чаваб: P=0,3 .

6. Үч атычы һәдәфә ејни вахтда атәш ачыр вә икиси һәдәфә дәјир. I, II вә III атычынын һәдәфи вурмасы еһтималынын, ујғун олараг 0,6; 0,5 вә 0,4 олдуғуну биләрәк, III атычынын һәдәфи вурдуғунун еһтималыны тапын.

Чаваб: $P=\frac{10}{19}$ .

7. Пирамидада үч оптик нишанкаһла тәчриз олунмуш беш түфәнк гојулмушдур. Атычынын оптик нишанкаһла тәчһиз олунмуш түфәнклә һәдәфи вурма еһтималы 0,95; оптик нишанкаһсыз түфәнклә һәдәфи вурмасы еһтималы 0,7-јә бәрабәрдир. Атычынын тәсадүфи олараг көтүрдүјү түфәнклә бир атәшдә һәдәфи вурмасы еһтималыны тапын.

Чаваб: P=0,85 .

8. Һәр бириндә 20 детал олмагла үч партија детал вардыр. I, II вә III партијада стандарт деталларын сајы ујғун олараг 20, 15 вә 10-а бәрабәрдир. Тәсадүфи көтүрүлмүш партијадан тәсадүфи олараг көтүрүлмүш детал стандартдыр. Бу

детал партијаја гајтарылыр вә јенидән һәмин партијадан тәсадүфи олараг бир детал көтүрүлүр вә о да јенидән стандарт олур. Бу деталларын үчүнчү партијадан көтүрүлмәси еһтималыны тапын.

Ҹаваб: $P=\frac{4}{29}$ .

9. Үч гутунун һәр бириндә 6 гара вә 4 ағ күрәчик вардыр. Тәсадүфи олараг биринчи гутудан бир күрәчик чыхарылыр вә икинчи гутуја гојулур, бундан сонра икинчи гутудан тәсадүфи олараг бир күрәчик чыхарылыр вә үчүнчү гутуја гојулур. Тәсадүфи олараг үчүнчү гутудан чыхарылмыш күрәчијин ағ олмасы еһтималыны тапын.

Ҹаваб: $P=0{,}4$ .

10. Үч топдан ибарәт батарејадан ејни заманда атәш ачылмышдыр вә онларын икиси һәдәфә дәјмишдир. I, II вә III мәрминин һәдәфә дәјмәси еһтималларынын ујғун олараг 0,4; 0,3; 0,5 олдуғуну биләрәк биринчи топдан атылан мәрминин һәдәфә дәјмәси еһтималыны тапын.

Ҹаваб: $P=\frac{20}{29}$ .

II фәсил

# Тәкрар сынаглар.

## 2.1. Бернулли дүстуру. Еһтималлар полигону.

### 1. Нәзәри мә"лумат.

Тутаг ки, A һадисәсини алмаг үчүн n дәфә асылы олмајан тәкрар сынаг кечирилир вә һәр бир сынагда A һадисәсинин баш вермә еһтималы p-дир. Бу сынаглар серијасында A һадисәсинин m ($0 \leq m \leq n$) дәфә баш вермәсинин еһтималы

$$P_{m,n} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} \qquad (1)$$

дүстуру илә тапылыр, бурада $q=1-p$. (1) дүстуруна J.Бернулли дүстуру дејилир. Гејд олунмуш n үчүн бу дүстур $P_{m,n}$-и m-ин функсијасы кими ифадә едир. Бу функсија еһтималларын пајланмасынын Биномал гануну адланыр. Бурада олан асылылығы чәдвәл шәклиндә дә вермәк олар:

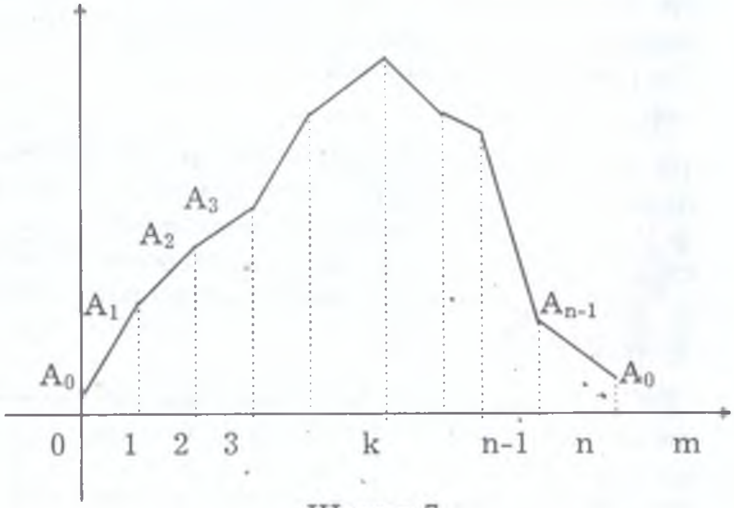
| A һадисәсинин тезлији (m) | 0 | 1 | 2 | . | k | n | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| m тезлијинә ујғун еһтимал ($P_{m,n}$) | $q^n$ | $C_n^1 pq^{n-1}$ | $C_n^2 p^2 q^{n-2}$ | ... | $C_n^k p^k q^{n-k}$ | ... | $p^n$ |

A һадисәсинин сынаглар серијасында k дәфә-дән чох баш вермәмәси еһтималы $P(m \leq k)$ белә һесаб-ланыр:

$$P(m \leq k) = \sum_{j=0}^{k} p_{j,n} = p_{0,n} + p_{1,n} + \cdots + p_{k,n} \qquad (2)$$

(2) бәрабәрлији илә тә"јин олунан еһтимала кумулјатив, јахуд "јығылмыш" еһтимал дејилир.

Дүзбучаглы координат системиндә $A_m(m,P_{m,n})$ (m=0,1, ... ,n) нөгтәләри гурулур. Бу нөгтәләри ардычыл бирләшдирмәклә алынан сыныг хәттә еһтималлар полигону (чохбучаглысы) дејилир (Шәкил 7).




Шәкил 7

2. Мәсәлә һәлли нүмунәләри.

Мәсәлә 1. Дәмир пулу 5 дәфә атдыгда "керб" үзүнүн 2 дәфә дүшмәсинин еһтималы нә гәдәрдир?

Һәлли: Пулун "керб" үзүнүн дүшмәсинин еһтималы һәр бир һадисә үчүн p=0,5-дир. Онда q=1-p=0,5 олар. n=5 вә m=2 олдуғундан, (1) дүстуруна көрә ахтарылан еһтимал беләтапылар:

$$P_{2,5} = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = C_5^2 \cdot (0{,}5)^2 \cdot (0{,}5)^3 = C_5^2 \cdot (0{,}5)^5 =$$

$$= \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot (0{,}5)^5 = 10 \cdot (0{,}5)^5$$

$$P_{2,5} = 10 \cdot (0{,}5)^5 = 0{,}3125$$

Мәсәлә 2. Дәмир пулу 5 дәфә атдыгда "керб" үзүнүн ән азы 3 дәфә дүшмәсинин еһтималы нә гәдәрдир?

Һәлли: Демәли, бизи $m \geq 3$ олмасы һадисәсинин еһтималы марагландырыр. Бу еһтимал ајдындыр ки, беләтапылар

$$P(m \geq 3) = P_{3,5} + P_{4,5} + P_{5,5}$$

Бурадан, Бернулли дүстуруна көрә

$$P_{3,5} = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2$$

$$P_{4,5} = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q$$

$$P_{5,5} = C_5^5 \cdot p^5 = p^5$$

олдуғундан,

$$P(m \geq 3) = C_5^3 p^3 q^2 + C_5^4 p^4 q + p^5 = p^3 \cdot (C_5^3 q^2 + C_5^4 pq + p^2)$$

алынар. $p=0{,}5$ вә $q=0{,}5$ олдуғуну нәзәрә алсаг,тапарыг ки,

$$P(m \geq 3) = (0{,}5)^3 \cdot (C_5^3 (0{,}5)^2 + C_5^4 (0{,}5)^2 + (0{,}5)^2) =$$

$$= (0{,}5)^5 \cdot (C_5^3 + C_5^4 + 1)) = 0{,}5$$

Мәсәлә 3. Зәри 10 дәфә атдыгда 6 рәгәминин (6 хал) 3 дәфә дүшмәси еһтималыны тапын.

Һәлли. Зәрин 6 үзү олдуғундан һәр бир үзүнүн дүшмәси еһтиалы $p=\frac{1}{6}$ . Демәли, $q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ .

Онда Бернулли дүстуруна көрә јазарыг:

$$P_{3,10} = C_{10}^3 \cdot p^3 \cdot q^7 = C_{10}^3 \cdot (\frac{1}{6})^3 \cdot (\frac{5}{6})^7 = C_{10}^3 \cdot \frac{5^7}{6^{10}} =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5^7}{6^{10}} = 120 \cdot \frac{5^7}{6^{10}} = \frac{120 \cdot 5^7}{6 \cdot 6^9} = \frac{20 \cdot 5^7}{6^9}$$

Мәсәлә 4. Оғланын доғулма еһтималыны $p=0,515$ гәбул едәрәк, һәр 10 јени доғулан ушағын 4-нүн гыз олмасынын еһтималыны тапын.

Һәлли. $q=1-p=0,485$. Онда Бернулли дүстуруна көрә

$$P_{4,10} = C_{10}^4 \cdot (0,515)^4 \cdot (0,485)^6 \approx 0,013$$

Мәсәлә 5. Гутуда 25 күрәчикдән 10 дәнәси гырмызы вә 15 дәнәси гарадыр. 5 дәфә гутудан күрәчик чыхарылыр вә һәр дәфә о гутуја гајтарылыр. Гутудан гара күрәчик чыхарылмасы үчүн бүтүн мүмкүн һалларын еһтималларыны тапын вә еһтималлар полигонуну гурун.

Һәлли. Һәр дәфә чыхарылан күрәчик гутуја гајтарылдығындан, бүтүн сынагларда гара күрәчик чыхарылмасынын еһтималы ејни олур: $p = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.

Онда $q = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ олар. Онда ашағыдакы мүмкүн һаллар ола биләр: $P_{0,5}$, $P_{1,5}$, $P_{2,5}$, $P_{3,5}$, $P_{4,5}$ вә $P_{5,5}$. Бу кәмијјәтләрин һәр бири исә Бернулли дүстуру илә һесабланыр:

$$P_{0,5} = q^5 = \left(\frac{2}{5}\right)^5 = 0,01024$$

$$P_{1,5} = C_5^1 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 0,0768$$

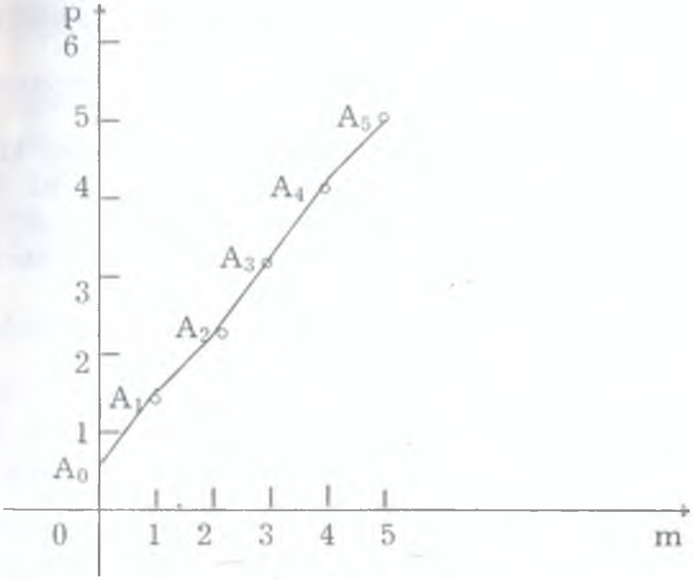
$$P_{2,5} = C_5^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0,0128$$

$$P_{3,5} = C_5^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0,3456$$

$$P_{4,5} = C_5^4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right) = 0,02592$$

$$P_{5,5} = C_5^5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \left(\frac{3}{5}\right)^5 = 0,3888$$

Бунлара әсасән, мүстәви үзәриндә дүзбучаглы координат системиндә $A_0(0,P_{0,5})$, $A_1(1,P_{1,5})$, $A_2(1,P_{2,5})$, $A_3(1,P_{3,5})$, $A_4(1,P_{4,5})$ вә $A_5(1,P_{5,5})$ нөгтәләрини гуруруг вә алынан ногтәләри бирләшдирмәклә ахтарылан еһтималлар полигонуну гурмуш олуруг (шәкил 8).




Шәкил 8.

3. Сәрбәст ишләмәк үчүн мәсәләләр.

1. Бир мүәссисәнин һазырладығы мәһсулун 30%-и ә"ла кејфијјәтли олур. Алынмыш 6 әдәд һәмин мүәссисәнин мәһсулундан 4 дәнәсинин ә"ла кејфијјәтли олмасынын еһтималыны тапын.

Чаваб: 0,06 .

2. Дәмир пулу 5 дәфә атдыгда "керб" үзүнүн 3 дәфә дүшмәсинин еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: 0,3125 .

3. 1,2,3, ... ,99,100 әдәдләри ардычыллығындан ихтијари 10-у сечилир вә һәр дәфә кери гајтарылыр. Сечилән әдәләр арасында 7-јә бөлүнән әдәдләрин икидән чох олмамасынын еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: 0,552 .

4. $n=4$, $p=0,2$ олдугда еһтималлар полигонуну гурун.

5. $n=11$, $p=0,7$ олдугда еһтималлар полигонуну гурун.

6. Емалатханада 12 мүһәррик ишләјир. Мөвчуд иш режими шәраитиндә мүһәррикин там күчлә ишләмәси еһтималы 0,8-дир. Бахылан анда ән азы 10 мүһәррикин там күчлә ишләмәсинин еһтималы нә гәдәрдир?

Чаваб: 0,559 .

## 2.2. Ән чох еһтималлы әдәд.

### 1. Нәзәри мә"лумат.

Тутаг ки, n асылы олмајан сынаглар серијасында А һадисәсинин баш вермә еһтималы сабит p әдәдинә бәрабәрдир ($0<p<1$). Бу сынаглар

серијасында А hадисәсинин m ($0 \le m \le n$) дәфә баш вермәсинин еhтималы

$$P_{m,n} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

Бернулли дүстуру илә тапылыр. Ајдындыр ки, $P_{m,n}$ гејд олунмуш n үчүн m-ин функсијасыдыр. $m=0,1,2,...,n$ гијмәтләриндә $P_{m,n}$-ин мүхтәлиф гијмәтләри ујгун олур. Тутаг ки, бу гијмәтләрдән ән бөјүјү $P_{m_0,n}$-дир. Онда $m_0$-а ән чох еhтималлы әдәд дејилир. Ән чох еhтималлы әдәд бир, јахуд ики ола биләр. $\mu=np-q$ там әдәд олдугда ән чох еhтималлы әдәд икидир:

$$m_0=\mu=np-q \quad \text{вә} \quad m_0^1 = m_0 + 1 = np + p \ .$$

$\mu=np-q$ - там әдәд олмадыгда исә, ән чох еhтималлы әдәд бирдир, өзү дә бу әдәд ($np-q$ , $np+q$) интервалында јерләшән јеканә там әдәддир:

$$np-q < m_0 < np+q \ .$$

Демәли, n вә p әдәдләри верилдикдә $q=1-p$ әдәди тапылыр вә $\mu=np-q$ әдәди hесабланыр. Бу әдәдин там олуб-олмамасындан асылы олараг ја ики, ја да бир ән чох еhтималлы әдәд тапылыр.

Бә"зән дә $P_{m,n}$ кәмијјәти m-ә нәзәрән азалан олур:

$$P_{n,n} < P_{n-1,n} < ... < P_{1,n} \le P_{0,n} \qquad (2)$$

Бу һалда ән чох еhтималлы әдәд ја бирдир ($m_0=0$), ја да икидир:($m_0=0$ вә $m_0^1 = 1$) .

Әкәр $P_{m,n}$ кәмијјәти m-ә нәзәрән артан олса:

$$P_{0,n} < P_{1,n} < ... < P_{n-1,n} \le P_{n,n} \qquad (3)$$

Онда ән чох еhтималлы әдәд $m_0=n$ - дир, ја да $m_0=n-1$ вә $m_0=n$ - дир ($P_{n-1,n} = P_{n,n}$ оланда).

## 2. Мәсәлә һәлли нүмунәләри.

Мәсәлә 1. $n=10$, $p=0,3$ олдугда ән чох еһтималлы әдәди тапын.

Һәлли. $\mu=np-q=10\cdot0,3-0,7=3-0,7=2,3$ - әдәди там дејил. Онда ән чох еһтималлы әдәд јеканәдир вә (2,3; 2,3) интервалында јерләшән там әдәдә бәрабәрдир: $m_0=3$.

Мәсәлә 2. $n=100$, $p=0,05$ олдугда ән чох еһтималлы әдәди тапын.

Һәлли. $q=1-p=1-0,05=0,95$ олдуғундан вә $\mu=np-q=100\cdot0,05-0,95=5-0,95=4,05$ олур. Бу һалда ән чох еһтималлы әдәд јеканәдир: $m_0=5$.

Мәсәлә 3. $n=19$, $p=0,2$ олдугда ән чох еһтималлы әдәди тапын.

Һәлли. $q=1-p=1-0,2=0,8$ олдуғундан,

$\mu=np-q=19\cdot0,2-0,8=3,8-0,8=3$ олур.

Демәли, бу дәфә ән чох еһтималлы әдәд икидир: $m_0=3$ вә $m_0^{\prime}=4$.

Мәсәлә 4. $n=13$, $p=\frac{3}{7}$ олдугда ән чох еһтималлы әдәди тапын.

Һәлли. $q=1-p=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$ ,

$$\mu=np-q=13\cdot\frac{3}{7}-\frac{4}{7}=\frac{39-4}{7}=\frac{35}{7}=5 .$$

Демәли, ән чох еһтималлы әдәд икидир: $m_0=5$ вә $m_0^{\prime}=6$.

Мәсәлә 5. Асылы олмајан тәкрар сынагларын сајы нечә олмалыдыр ки, $p=0,64$ оланда ән чох еһтималлы әдәд $m_0=51$ олсун.

Һәлли. $q=1-p=1-0,64=0,36$ .

Дикәр тәрәфдән

$$np - q < m_0 < np + p$$

олмалыдыр. Бурада n - и тапмаг үчүн

$$\begin{cases} n \cdot 0{,}64 - 0{,}36 \le 51 \\ n \cdot 0{,}64 + 0{,}64 \ge 51 \end{cases}$$

бәрабәрсизликләр системини аларыг. Бу системи һәлл етсәк, аларыг ки,

$$\frac{5036}{64} \le n \le \frac{5136}{64} \; .$$

Бу исә о демәкдир ки, $78{,}68 < n < 80{,}2$ . Јә"ни $n=79$ вә $n=80$ ола биләр.

Демәли, асылы олмајан сынаглары 79 вә 80 дәфә тәкрарласаг, ән чох еһтималлы әдәд $m_0=51$ олар.

Мәсәлә 6. Автомат дәзкаһда 90 һиссә һазырланмалыдыр. Бу партијада I-нөв һиссә һазырланмасы үчүн ән чох еһтималлы әдәдин 82 олмасы үчүн һәмин дәзкаһда I-нөв һиссәнин һазырланмасы еһтималы нә гәдәр олмалыдыр?

Һәлли. Шәртә көрә $m_0=82$, $n=90$.

Дикәр тәрәфдән

$$np - q < m_0 < np + p \; .$$

Демәли,

$$\frac{m_0}{n+1} \le p \le \frac{m_0 + 1}{n+1}$$

олмалыдыр. Бурада $m_0=82$, $n=90$ олдуғуну нәзәрә алсаг, тапарыг ки,

$$\frac{82}{91} \le p \le \frac{83}{91} \; .$$

3. Сәрбәст ишләмәк үчүн мәсәләләр.

1. n=16, p=0,3 олдугда ән чох еһтималлы әдәди тапын.

Чаваб: 5 .

2. n=121, p=0,6 олдугда ән чох еһтималлы әдәди тапын.

Чаваб: 73 .

3. n=217, p=0,8 олдугда ән чох еһтималлы әдәди тапын.

Чаваб: 174 .

4. n=75, p=0,2 олдугда ән чох еһтималлы әдәди тапын.

Чаваб: 15 .

5. n=63, p=0,9 олдугда ән чох еһтималлы әдәди тапын.

Чаваб: 57

6. Зәри нечә дәфә атмаг лазымдыр ки, 5 хал дүшмәсинин ән чох еһтималлы әдәди 32 олсун?

Чаваб: 191-дән 197-ә кими.

7. Стандарта ујғун кәлмәјән һиссәнин һазырланмасы еһтималы p=0,05-дир. Партијада нечә һиссә олмалыдыр ки, орада стандарта ујғун кәлмәјән һиссәләрин ән чох еһтималлы әдәди 63 олсун?

Чаваб: $1259 \le n \le 1279$ .

8. Һәр атәш заманы һәдәфин вурулмасы еһтималы p=0,7 оларса, нечә атәш ачылмалыдыр ки, һәдәфин вурулмасынын ән чох еһтималлы әдәди 16 олсун?

Чаваб: 22 јахуд 23 .

9. Һәдәфә 6 атәш ачылмышдыр. Һәр атәш заманы һәдәфин вурулмасы еһтималы p=0,3-дүр. а) Һәдәфә дәјмәнин ән чох еһтималлы әдәдини, б) ән чох еһтималлы әдәдә ујғун еһтималы тапмалы.

Чаваб: $m_0 = 2$ ; $P(2,6) = C_6^2 \cdot p^2 \cdot q^4 = 0,324$ .

10. Һәр атәш заманы һәдәфин вурулмасы еһтималы p=0,25 олмагла 21 атәш ачылмышдыр. Һәдәфин вурулмасынын ән чох еһтималлы әдәдини тапын.

Чаваб: $m_0 = 5$ .

11. 49 асылы олмајан сынаглар заманы һадисәнин баш вермәсинин ән чох еһтималлы әдәдинин 30 олмасы үчүн һәр сынагда һадисәнин баш вермә еһтималы p нә гәдәр олмалыдыр?

Чаваб: $0,6 \le p \le 0,62$ .

12. 39 асылы олмајан сынаглар заманы һадисәнин баш вермәсинин ән чох еһтималлы әдәдинин 25 олмасы үчүн һәр сынагда һадисәнин баш вермә еһтималы p нә гәдәр олмалыдыр?

Чаваб: $0,625 < p \le 0,65$ .

13. p һансы гијмәтләри алмалыдыр ки, n=15 оланда $m_0 = 9$ олсун?

Чаваб: $\frac{9}{16} \le p \le \frac{5}{8}$ .

14. n=25 оланда p һансы гијмәтләри алмалыдыр ки, $m_0 = 13$ олсун?

Чаваб: $\frac{1}{2} \le p \le \frac{7}{13}$ .

15. p һансы гиjмәтләри алмалыдыр ки, n асылы олмаjан сынаглар серијасында ән чох еһтималлы әдәд $m_0$ олсун?

Чаваб: $\frac{m_0}{n+1} \le p \le \frac{m_0+1}{n+1}$ .

## 2.3. Муавр-Лапласын локал вә интеграл теоремләри.

### 1. Нәзәри мә"лумат.

Локал теорем . n сaјда асылы олмаjан сынаглар серијасында А һадисәсинин баш вермә еһтималы p исә $(0<p<1)$ бу серијада А һадисәсинин m дәфә баш вермә еһтималы $P_{m,n}$ ашагыдакы мүнасибәти өдәјир:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{npq}\cdot P_{m,n}\right) : \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] = 1 ,$$

$$0 \le m \le n, \quad q = 1 - p, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} .$$

Бурадан, кифајәт гәдәр бөјүк n-ләр үчүн

$$P_{m,n} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x) \qquad (1)$$

алыныр.

Интеграл теорем . Һадисәнин n сaјда асылы олмаjан сынаглар серијасынын һәр сынағында баш вермә еһтималы сабит p-дирсә $(0<p<1)$, онда бу А һади-

сәсинин һәмин серијада баш вермәләри сајы m-ин $a \le m \le b$ шәртини өдәмәси еһтималы

$$P_{(a,b),n} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \qquad (2)$$

кими һесабланыр, бурада $x_1 = \dfrac{a - np}{\sqrt{npq}}$ , $x_2 = \dfrac{b - np}{\sqrt{npq}}$ ,

$\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right) dt$ - Лаплас функсијасыдыр.

Еһтимал нәзәријјәсинә аид китабларда φ(x) вә Ф(x) функсијаларынын гијмәтләри чәдвәли верилир. Һәмин чәдвәлләрин көмәјилә $P_{m,n}$ вә $P_{(a,b),n}$- еһтималларыны тапмаг олур.

2. Мәсәлә һәлли нүмунәләри.

Мәсәлә 1. n=100 вә p=0,3 олдугда $P_{36,100}$ еһтималыны тапын.

Һәлли: m=36, n=100, p=0,3 олдуғундан q=1-p=1-0,3=0,7. Демәли,

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{36 - 100 \cdot 0{,}3}{\sqrt{100 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7}} = \frac{6}{\sqrt{21}} \approx \frac{6}{4{,}583} \approx 1{,}31$$

$x \approx 1{,}31$

Онда φ(x) функсијасынын гијмәтләри чәдвәлиндән тапырыг ки,

$$\varphi(1{,}31) = 0{,}16915 \ .$$

Демәли, (1) дүстуруна көрә

$$P_{36,100} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{4{,}583} \cdot 0{,}16915 \approx \frac{0{,}1692}{4{,}583} = \frac{1692}{45830}$$

$P_{36,100} \approx 0{,}041$ .

Мәсәлә 2. п=600 вә р=0,4 олдугда $P_{180,400}$ еһтималыны тапын.

Һәлли: q=1-p=1-0,4=0,6 ;

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{180 - 600 \cdot 0,4}{\sqrt{600 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} = \frac{-60}{12} = -5 \ ;$$

$$\varphi(-5) = \varphi(5) = 0,0000015 \ .$$

Дeмәли, (1) дүстуруна көрә

$$P_{180,400} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{12} \cdot 0,0000015 \approx 0,0000001$$

Мәсәлә 3. Һәр бир һиссәнин ә"ла нөвлү олмасы еһтималы р=0,62 олдугда 800 әдәд һиссәдән ибарәт партијада ә"ла нөвлү һиссәләрин сајынын 600 илә 700 арасында олмасы еһтималы нә гәдәрдир?

Һәлли: р=0,62 , n=800 , $600 \le m \le 700$ олдуғундан, q=1-p=1-0,62=0,38 ; a = 600 , b = 700 олур вә буна көрә дә

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}} = \frac{600 - 800 \cdot 0,62}{\sqrt{800 \cdot 0,62 \cdot 0,38}} = \frac{600 - 496}{\sqrt{8 \cdot 62 \cdot 0,38}} = \frac{104}{13,4} \approx 7,76$$

$$x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} = \frac{700 - 800 \cdot 0,62}{\sqrt{800 \cdot 0,62 \cdot 0,38}} = \frac{700 - 496}{\sqrt{8 \cdot 62 \cdot 0,38}} = \frac{204}{13,4} \approx 15,22$$

Ф(х) - Лаплас функсијасынын гијмәтләри чәдвәлиндән тапырыг ки,

$$\Phi(x_1)=0,5 \quad \Phi(x_2)=0,5 \ .$$

Демәли, (2) дүстуруна көрә ахтарылан еһтимал

$$P_{(600,700)} \approx \Phi(x_1)-\Phi(x_2)=0,5-0,5=0$$

олар.

Мәсәлә 4. Зәри 4200 дәфә атдыгда 4 хал дүшмәси сајынын 650 вә 700 арасында олмасынын еһтималыны тапын.

Һәлли. n=4200, a=650 , b=700 , $p=\frac{1}{6}$ олдуғундан $q=\frac{5}{6}$ вә

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}} = \frac{650 - 4200 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{4200 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} = \frac{(650 - 700) \cdot 6}{\sqrt{6 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 100}} =$$

$$= \frac{-150}{5 \cdot \sqrt{210}} = -\frac{30}{\sqrt{210}} \approx -2{,}0702$$

$$x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} = \frac{700 - 4200 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{4200 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} = 0$$

Чәдвәлдән тапырыг ки,

$\Phi(x_1)=- \Phi(2{,}0702) \approx -0{,}4812$

$\Phi(x_2)=\Phi(0)=0$

Беләликлә, ахтарылан еһтималы (2) дүстуру илә һесаблаја биләрик:

$$P_{(650,700),4200}= \Phi(x_2)-\Phi(x_1)=-\Phi(x_1)= 0{,}4812 \ .$$

3. Сәрбәст ишләмәк үчүн мәсәләләр.

1. Һәр бир сынагда мүвәффәгијјәт әлдә едил-мәси еһтималы 0,25-ә бәрабәрдир. 300 сынагда

мүвәффәгијјәтин: а) 75 дәфә; б) 85 дәфә әлдә едилмәси еһтималыны тапын.

Чаваб: а) ≈0,0532; б) ≈0,0219 .

2. Биринчи синфә 200 шакирд гәбул олунмалыдыр. Оғланларын доғулмасы еһтималы 0,515-дирсә, гәбул олунанларын 100-нүн гыз олмасы еһтималыны тапын.

Чаваб: ≈0,051

3. Сехдә 6 мүһәррик вар, һәр бир анда мүһәррикин гошулмасы еһтималы 0,8-ә бәрабәрдир. Верилән анда: а) 4 мүһәррикин гошулмасы; б) бүтүн мүһәррикләрин гошулмасы; в) бүтүн мүһәррикләрин гошулмамасы еһтималларыны тапын.

Чаваб: а) 0,246; б) 0,26; в) 0,000064 .

4. Һәр сынагда А һадисәсинин баш вермәси еһтималы 0,3-ә бәрабәрдирсә, 5 асылы олмајан сынагда А һадисәсинин ән азы 2 дәфә баш вермәси еһтималыны тапын.

Чаваб: 0,472

5. Пулу 6 дәфә атдыгда онун "герб" үзүнүн: а) 2 дәфәдән аз; б) ән азы 2 дәфә дүшмәси еһтималыны тапын.

Чаваб: а) $P=P_6(0)+P_6(1)=\frac{7}{64}$ ,

б) $Q=1-[P_6(0)+P_6(1)]=\frac{57}{64}$ .

6. Бир күлләнин һәдәфи вурмасы еһтималы 0,4-ә бәрабәрдир. 600 күлләдән ән азы 200 вә ән чоху 250-синин һәдәфи вурмасы еһтималыны тапын.

Чаваб: 0,7963 .

7. Електрик стансијасы 10000 лампаны тә"мин едир. Ахшам һәр бир лампанын гошулмасы еһтималы 0,6-ја бәрабәрдир. Ејни бир анда гошулмуш лампаларын сајынын 5900 вә 6100 интервалында олмасы еһтималыны тапын.

Чаваб: 0,958 .

8. Бир күллә илә атычынын һәдәфи вурмасы еһтималы 0,75-ә бәрабәрдир. 100 атәш ачылдыгда һәдәфин: а) ән азы 70 вә ән чоху 80 дәфә; б) ән азы 70-дәк еһтималыны тапын.

Чаваб: а) 0,7498 ; б) 0,1251 .

9. 2100 асылы олмајан һәр бир сынагда һадисәнин баш вермә еһтималы 0,7-јә бәрабәрдир. Һадисәнин: а) ән азы 1470 вә ән чоху 1500 дәфә; б) ән азы 1470 дәфә; в) ән чоху 1469 дәфә баш вермәси еһтималыны тапын.

Чаваб: а) 0,4236 ; б) 0,5 ; в) 0,5 .

10. Зәри 2200 дәфә атдыгда "1" халынын дүшмәсинин 1900 вә 2150 арасында олмасы еһтималыны тапмалы?

Чаваб: 0,99 .

11. $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$ функсијасынын графикини гурмалы вә исбат етмәли ки,

$$\Phi(-x)+\Phi(x)=1 .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt + \int_{-x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

Бәрабәрлијин сол тәрәфиндәки интеграл 1-ә бәрабәрдир (Пуассон интегралы). Бәрабәрлијин сағ

тәрәфиндәки интеграл t=-u әвәзләмәси илә ашағыдакы шәкилә кәтирилир:

$$-\int_x^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du$$

Нәтичәдә, $1=\Phi(-x)+\Phi(x)$ .

12. Асылы олмајан 625 сынағын һәр бириндә мүвәффәгијјәт газанылмасы еһтималы 0,8-ә бәрабәрдир. Мүвәффәгијјәтин баш вермәсинин нисби тезлијинин еһтималдан мејлинин мүтләг гијмәтчә 0,04-ү ашмамасы еһтималыны тапмалы.

Чаваб: ≈0,9876 .

13. Асылы олмајан һәр сынагда һадисәнин баш вермәси еһтималы 0,5-ә бәрабәрдир. Нечә дәфә сынаг кечирмәк лазымдыр ки, һадисәнин баш вермәсинин нисби тезлијинин еһтималдан мејлинин мүтләг гијмәтчә 0,08-дән чох олмамасы еһтималынын 0,92 олмасыны көзләмәк олсун?

Чаваб: n>7656 .

14. Нә гәдәр сынаг апармаг лазымдыр ки, $\left[\frac{m}{n}-0{,}36\right]\le 0{,}01$ олмасыны 0,99-дан аз олмајан еһтималла тә"мин етмәк мүмкүн олсун?

Чаваб: 15335 .

15. 21 асылы олмајан һәр бир сынагда һадисәнин баш вермәси еһтималы 0,7-јә бәрабәрдир. Һадисәнин сынагларын чох һиссәсиндә баш вермәси еһтималыны тапын.

Чаваб: 0,5945 .

## 2.4. Пуассон теореми.

### 1.Нәзәри мә"лумат.

Һадисәнин p еһтималы $\frac{1}{2}$-дән фәргләндикчә, Муавр-Лапласын локал теореминин нәтичәси пис нәтичә верир. Һәмин теоремә әсасән алынмыш

$$P_{m,n} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

дүстуру p-нин $\frac{1}{2}$-ә јахын гијмәтләриндә јахшы нәтичә верир. Лакин бир чох мәсәләләрдә p-нин сыфра вә ја ваһидә јахын гијмәтләри үчүн ујғун дүстурун тапылмасына еһтијач олур. Бу дүстуру Пуассон тапмышдыр.

Сынаглар серијасындан дүзәлдилмиш ашағыдакы ардычыллыға бахаг:

1 - сынаг: $E_{11}$;
2 - сынаг: $E_{21}, E_{22}$;
3 - сынаг: $E_{31}, E_{32}, E_{33}$;
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
n - сынаг: $E_{n1}, E_{n2}, \cdots, E_{nn}$;
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Бурада һәр бир сәтирә дүшән һадисәләр өз араларында асылы олмајан бир серијанын һадисәләрини көстәрир вә һадисәләрин һәр биринин еһтималы анчаг серијанын n-чи нөмрәсиндән асылыдыр. Бу еһтималы $P_n$ илә ишарә едәк. $\mu_n$ n-чи серијада фактик баш вермиш һадисәләрин сајы олсун. Онда Пуассон теоремини беләә сөјләмәк олар:

<u>Пуассон теореми.</u>

$$\lim_{n\to\infty} P_n = 0 \text{ олдугда}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[P(\mu_n = m) - \frac{a_n^m}{m!}\cdot e^{-a_n}\right] = 0\ ,\ a_n=n\cdot P_n\ . \qquad (1)$$

$P_n(m)=P(\mu_n=m)$ ишарәсини гәбул етсәк, (1) дүстурундан алырыг:

$$P_{m,n} \approx \frac{a_n^m}{m!}\cdot e^{-a_n}\ . \qquad (2)$$

(2) дүстуру илә $P_n(m)$ кәмиjjәтини тәгриби һесабламаг үчүн јарајыр.

Гејд едәк ки, һадисәнин еһтималы сыфра бәрабәр олан һалда да (бу һалда $P_n=0$ олур вә буна көрә дә $a_n=0$) Пуассон теореми доғрудур.

Практики фәалиjjәтдә (2) дүстуру әвәзинә

$$P_{m,n} = \frac{a^m}{m!}\cdot e^{-a}\ . \qquad (3)$$

дүстурундан истифадә олунур вә бу да Пуассон дүстуру адланыр. Бу дүстурда m - тезлијинин һәр бир гијмәтинә мүәjjән еһтимал (P(m)) гаршы гојулур. Она көрә дә бу дүстура еһтималларын пајламасынын Пуассон ганунуну да дејилир.

Нәһајәт, ону да гејд едәк ки, m тезлији 0-дан $m_0=[a]$-ја гәдәр артдыгда P(m) артыр, сонра исә азалыр.

## 2. Мәсәлә һәлли нүмунәләри.

Мәсәлә 1. Базадан мүәссисәјә 5000 кејфиjjәтли мә"мулат көндәрилиб. Мә"мулатын јолда зәдәләнмәси еһтималы 0,0002-јә бәрабәрдир. Мүәссисәјә 3 зәдәләнмиш мә"мулатын кәлмәси еһтималыны тапмалы.

Һәлли. Шәртә көрә n=5000, p=0,0002, m=3 . a-ны һесаблајаг:

$$a=n\cdot p=5000\cdot 0{,}0002=1$$

Пуассон дүстуруна әсасән ахтарылан тәгриби еһтимал

$$P_{5000}(3)\approx \frac{a^m}{m!}\cdot e^{-a} = \frac{1}{3!}\cdot e^{-1}=\frac{1}{6\cdot e}\approx 0{,}06$$

олур.

Мәсәлә 2. Һәр һансы сынаг нәтичәсиндә А һадисәсинин баш вермәси еһтималы 0,001-дир. 2000 belә гаршылыглы асылы олмајан сынаг кечирилир. А һадисәсинин: а) баш вермәмәси; б) 1 дәфә баш вермәси; в) 2 дәфә баш вермәси; г) 3 дәфә баш вермәси еһтималыны һесабламалы.

Һәлли. Шәртә көрә n=2000, p=0,0001 вә $a=n\cdot p=2000\ 0{,}0001=2$ . Пуассон дүстуруна көрә

а) $P_{2000}(0)\approx \frac{2^0\cdot e^{-2}}{0!}=e^{-2}=0{,}135\ \ (0!=1)$

б) $P_{2000}(1)\approx \frac{2^1\cdot e^{-2}}{1!}=2\cdot e^{-2}=0{,}271$

в) $P_{2000}(2)\approx \frac{2^2\cdot e^{-2}}{2!}=2\cdot e^{-2}=0{,}271$

г) $P_{2000}(3)\approx \frac{2^3\cdot e^{-2}}{3!}=\frac{4\cdot e^{-2}}{3}=0{,}180$ .

Мәсәлә 3. 1 лотареја билетинин удуш еһтималы p=0,01-дир. Нечә билет алмаг лазымдыр ки, һеч олмазса онлардан бири илә 0,95-дән кичик олмајан p еһтималы илә удмаг мүмкүн олсун?

Һәлли. Удушун еһтималы кичикдир, алынаса билетләрин сајы исә ајдындыр ки, бөјүкдүр. Она көрә удуш билетләринин тәсадүфи сајы тәгриби Пуассон пајланмасына маликдир.

Ајдындыр ки, "алынан билетләрин һеч бири удушлу дејил" вә "һеч олмазса билетләрдән бири удушлудур" һадисәләри гаршылыглыдыр. Она көрә бу һадисәләрин еһтималлары чәми ваһидә бәрабәрдир:

$$P_n(0)+p=1 \text{ вә ја } p=1-P_n(0)$$

$$P_{m,n} = \frac{a^m}{m!}\cdot e^{-a}$$ Пуассон дүстурунда m=0 јазыб

$$P_n(0) = e^{-a}$$

аларыг.

Беләликлә, $p=1-e^{-a}$ .

Шәртә көрә $p \geq 0,95$ вә ја $1-e^{-a} \geq 0,95$. Бурадан

$$e^{-a} \leq 0,05 \qquad (*)$$

$e^{-x}$ функсијасынын гијмәтләр чәдвәлиндән $e^{-3}=0,05$ тапырыг. $e^{-x}$ функсијасынын азалан функсија олдуғуну нәзәрә алсаг (*) бәрабәрсизлијинин $x \geq 3$ вә ја $np \geq 3$ олдугда өдәнилдијини тәсдиг едирик. Беләликлә,

$$n \geq \frac{3}{p} = \frac{3}{0,01} = 300$$

Демәли, ән азы 300 билет алмаг лазымдыр ки, онлардан бири илә удмаг мүмкүн олсун.

### 3. Сәрбәст ишләмәк үчүн мәсәләләр.

1. (Банах мәсәләси). Бир ријазијјатчы өзүндә 2 гуту кибрит көтүрүр. О, һәр дәфә чөпү тәсадүфи олараг гутуларын бириндән чыхарыр. Ријазијјатчынын гутуларын бириндә r әдәд кибрит чөпү

галдыгда о бириси гутунун биринчи дәфә онун әлинә бош чыхмасы еһтималыны тапын (r=0,1,2,...,n , n - долу гутунун чөпләринин сајыдыдыр).

Ҹаваб: $\frac{1}{2^{2n-r}} C_{2n-r}^{n}$ .

Көстәриш: Чөпләр бош гутудан n дәфә көтүрүлмәклә ҹәми (2n-r) дәфә көтүрүлмүшдүр. Бу (2n- r) сынагда n мүвәффәгијјәтә ујғун кәлир.

2. Әјричи 1000 кәләфи идарә едир. Бир дәгигә әрзиндә һәр бир кәләфин сапынын гырылмасы еһтималы 0,004–ә бәрабәрдир. Бир дәгигә әрзиндә 5 кәләфин сапынын гырылмасы еһтималыны тапын.

Ҹаваб: $\frac{1024}{120 \cdot e^4} \approx 0{,}1563$ .

3. Ихтијари абонентин 1 саат әрзиндә коммутатора зәнк етмәси еһтималы 0,01–ә бәрабәрдир. Телефон стансијасы 800 абоненти тә"мин едир. 1 саат әрзиндә 5 абонентин зәнк етмәси еһтималыны тапын.

Ҹаваб: $\frac{8^5}{5!} \cdot e^{-8} \approx 0{,}0916$ .

4. Елми тәдгигат институтунун 500 әмәкдашы вар. 2 нәфәрин ад күнүнүн "Јени ил" бајрамына дүшмәси еһтималыны тапмалы. Һәр бир кәсин доғулма еһтималы гејд олунмуш күндә $\frac{1}{365}$–ә бәрабәр көтүрмәли.

Ҹаваб: $\approx 0{,}2385$ .

5. Хәстәлик төрәдән микробларын 1 $м^3$–дә орта сыхлығы 100–ә бәрабәрдир. Јохламада 2 $дм^3$ һава көтүрүлүр. Көтүрүлән һавада һеч олмазса 1 микроб олмасы еһтималыны тапын.

Ҹаваб: $1-P_{100}(0)=1-e^{-0,2} \approx 0{,}1813$ .

6. Һәр бир атәш ачылдыгда һәдәфин вурулмасы еһтималы 0,001-дир. 5000 атәшдән 2 вә даһа артыг күлләнин һәдәфә дәјмәси еһтималыны тапын.

Чаваб: $1-6 \cdot e^{-5} \approx 0,9596$ .

III фәсил.

# Тәсадүфи кәмиjjәтләр вә онларын пajланмасы.

## 3.1. Тәсадүфи кәмиjjәтләр вә онларын пajланма функсиjалары.

### 1. Нәзәри мә”лумат.

1. Тәсадүфи кәмиjjәт сынағын мүмкүн нәтичәләринин әмәлә көтирдиjи елементар һадисәләр меjданында тә”jин едилмиш биргиjмәтли функсиjа кими нәзәрдә тутулур.

Тәсадүфи кәмиjjәтләри $\xi,\eta,\ldots$ кими һәрфләрлә, jахуд да латын әлифбасынын бөjүк һәрфләри илә $(X,Y,Z,\ldots)$ ишарә едәчәjик. Бу һалда тәсадүфи кәмиjjәтин ала биләчәjи гиjмәтләри уjғун кичик һәрфләрлә көстәрәчәjик. Мәсәлән, X вә x, У вә у вә с.

“Тәсадүфи кәмиjjәт верилмишдир” дедикдә нәзәрдә тутачағыг ки,

1) тәсадүфи кәмиjjәтин ала биләчәjи гиjмәтләр верилмишдир;

2) тәсадүфи кәмиjjәтин бу гиjмәтләри һансы еһтималларла ала биләчәjи мә”лумдур.

Әсасән 2 нөв тәсадүфи кәмиjjәтдән данышмаг олар:

1) дискрет типли,

2) кәсилмәз типли.

Әкәр тәсадүфи кәмиjjәт сонлу вә изоле едилмиш нөгтәләрдән тәшкил олунмуш $x_1, x_2,\ldots,x_n,\ldots$ шәклиндә ардычыллыг әмәлә кәтирән мүхтәлиф гиjмәтләр ала билирсә, онда беләкәмиjjәтә дискрет типли тәсадүфи кәмиjjәт деjилир [1, сәһ.78]. Мәсәлән, бир шәһәрдә олан заводларын саjы, бир групда

олан тәләбәләрин сајы, бир өлкәдә олан профессорларын сајы, бир өлкәдә јашајан вәтәндашларын сајы вә с. дискрет типли тәсадүфи кәмијјәтләрдир.

II. Әкәр тәсадүфи кәмијјәт һәр һансы бир интервалдан истәнилән гијмәти ала билирсә, онда белә кәмијјәтә кәсилмәз типли тәсадүфи кәмијјәт дејилир. Мәсәлән, бир колдан јығылан памбығын чәкиси, устанын һазырладығы борунун узунлуғу (вә јахуд чәки дашынын ағырлығы) вә с. кәсилмәз типли тәсадүфи кәмијјәтләрдир.

2. Тә"риф. Тәсадүфи кәмијјәтләрин мүмкүн гијмәтләри илә онлара ујғун еһтималлар арасында әлагә јарадан һәр бир мүнасибәтә о тәсадүфи кәмијјәтин пајланма ғануну дејилир.

X кәмијјәтинин $x_к$ гијмәти алмасы һадисәсинин $(X=x_к)$ кими ишарә едиб, она ујғун еһтималы $p_к$ илә көстәрмәји шәртләшәк:

$$p_к=P(X=x_к) \quad (к=1,2,...)$$

Көрүндүјү кими, $p_к$-нын өзү $x_к$-нын функсијасыдыр. Бу функсијаја X тәсадүфи кәмијјәтинин пајланма функсијасы дејилир.

Дискрет типли тәсадүфи кәмијјәтин пајланма ганунуну чәдвәл шәклиндә, јахуд мүәјјән дүстурла көстәрмәк олар.

Әкәр X тәсадүфи кәмијјәтинин ала биләчәји гијмәтләр $\{x_k\}$, онлара ујғун еһтималлар исә $\{p_k\}$ оларса, онда X-ин пајланма гануну ашағыдакы чәдвәл шәклиндә верилә биләр:

| X | X-ин мүмкүн гијмәтләри | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ујғун еһтималлар | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ | ... |

Бу кими һалларда нәзәрдә сахламаг лазымдыр ки, биринчи сәтирдә X-ин ала биләчәји гијмәтләрин һамысы олмалыдыр. Бу исә о демәкдир ки,

$$\sum_k (X = x_k) = u$$

шәрти вә демәли,

$$\sum_k p_k = 1$$

шәрти дә өдәнилмәлидир. Әкәр бу шәртләр өдәнилмәсә, бу о демәк олар ки, чәдвәл дүзкүн тәртиб олунмамышдыр.

Мисал үчүн Бернулли схеминә ујғун олан пајланманын чәдвәлини дүзәлдәк.

Мә"лумдур ки, бу һалда

$$P_{k,n} = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (p + q = 1),\ k = 0, 1, \ldots, n\ .$$

Онда ујғун чәдвәл ашағыдакы кими олар:

| m-тезлијинин гијмәтләри | 0 | 1 | 2 | ... | k | ... | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_{m,n}$ еһтималлары | $q^n$ | $C_n^1 pq^{n-1}$ | $C_n^2 p^2 q^{n-2}$ | ... | $C_n^k p^k q^{n-k}$ | ... | $p^n$ |

Ајдындыр ки,

$$q^n + C_n^1 pq^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + p^n =$$

$$= (q + p)^n = 1$$

Гејд едәк ки,кәсилмәз типли тәсадүфи кәмијјәтләр үчүн белә чәдвәл дүзәлтмәк олмаз. Бунун әсасән ики сәбәби вар:

1) кәсилмәз типли тәсадүфи кәмијјәтләрин бүтүн мүмкүн гијмәтләрини сајмаг, нөмрәләмәк мүмкүн дејил;

2) Белә тәсадүфи кәмијјәтләр үчүн истәнилән $X=x_к$ һадисәсинини еһтималы сыфра бәрабәрдир:

$$P(X=x_к)=0$$

Она көрә дә зәрурәт олдугда кәсилмәз типли тәсадүфи кәмијјәтләр үчүн интерваллар үзрә пајланма чәдвәли дүзәлтмәк олар.

$$p_k = P(x_k < X < x_{k+1}) \quad (k = 1,2,...)$$

ишарәсини гәбул етсәк, онда чәдвәл белә олар:

| X | X-ин гијмәтләри интерваллары | $(x_1,x_2)$ | $(x_2\ x_3)$ | ... | $(x_к,x_{к+1})$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ујғун еһтималлар | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_к$ | ... |

## 2. Нүмунәви мәсәләләр һәлли.

Тәчрүбәдә ән чох раст кәлинән биномал, һәндәси, мүнтәзәм, үстлү, Пуассон, нормал вә с. пајланма ганунларыдыр. Бунларын һәр бири јзәриндә гысача дајанаг (бах [1]).

Мәсәлә 1. Биномал пајланма. Бу пајланма параграф 1-дә көстәрилмишдир.

Мәсәлә 2. Һәндәси пајланма.
Асылы олмајан сынаглар серијасында А һадисәси илк дәфә баш верәнә гәдәр апарылачаг

сынагларын сајы дискрет тәсадүфи кәмијјәтдир. Бу кәмијјәтин пајланма гануну ашағыдакы чәдвәлдә верилир:

| А-нын биринчи дәфә баш вермәсинә гәдәр сынагларын сајы | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | n | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ујғун еһтималлар, $p_m$ | p | pq | $pq^2$ | $pq^3$ | ... | $pq^{n-1}$ | ... |

Бу гануну

$$p_n = pq^{n-1}, \ (n = 1,2,3,...,k) \qquad (1)$$

дүстурунун көмәји илә дә јазмаг олар. Әкәр бир дәфә сынаг апармагла А һадисәси баш верибсә, онда $P=P(A)=p$ олачагдыр. Лакин ола биләр ки, биринчи сынагда А һадисәси баш вермәсин ($\overline{A}$ һадисәси баш версин), анчаг икинчи сынагда А һадисәси баш версин. Онда А вә $\overline{A}$ һадисәләринин һасилләриндән ибарәт олан $B=\overline{A}\cdot A$ һадисәси алыначагдыр. Сынаглар асылы олмадығындан, еһтималларын вурулмасы ганунуна әсасән:

$$P(B)=P_2=P(\overline{A})\cdot P(A)=(1-p)p=qp$$

алыныр.

Әкәр А һадисәси анчаг үчүнчү сынагда баш верирсә, онда үч сынағын нәтичәсини $C=\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot A$ шәклиндә көстәрмәк олар ки, бурадан да

$$P(C)=P(\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot A)=P(\overline{A})\cdot P(\overline{A})\cdot P(A)=qqp=q^2p$$

олдуғу алыныр.

Əкəр A һадисəси илк дəфə n-чи сынагда баш верирсə, онда

$$P(\overline{A}\cdot\overline{A}\cdots\overline{A}\cdot A)=P(\overline{A})\cdot P(\overline{A})\cdots P(\overline{A})\cdot P(A)=q\cdot q\cdots q\cdot p=pq^{n-1}$$

оларды. Бу исə (1) дүстурунун доғрулуғуну көстəрир.

Мəсəлə 3. Биномал пајланма вə онун графики.

Һəр сынагда A һадисəсинин баш вермəсинин еһтималы сабит вə p əдəдинə бəрабəр олан n гəдəр асылы олмајан сынаглар серијасында A һадисəсинин баш вермəлəринин сајыны $\mu$ илə ишарə етсəк, Бернулли дүстуруна əсасəн јаза билəрик:

$$P_{m,n} = P(\mu = m) = C_n^m p^m q^{n-m} .$$

Бу һал үчүн пајланма функсијасы белə тə"јин олунур:

$$F(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{əкəр } x \le 0 \text{ оларса}\ , \\ \sum\limits_{k<x} P_{k,n}\ , & \text{əкəр } 1 < x \le 0 \text{ оларса}, \\ 1\ , & \text{əкəр } x > n \text{ оларса}. \end{cases}$$

Пајланма функсијасынын графики пиллəвари хəтдəн ибарəт олуб, x=0,1,2,...,n,... нөгтəлəриндə кəсилəндир. x=к нөгтəсиндə F(x) функсијасынын графики $P_{k,n}$-ə бəрабəрдир (шəкил 9).

Мəсəлə 4. Нормал пајланма.

$$F(x) = C\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)}{2\sigma^2}}dt\ , \qquad (2)$$

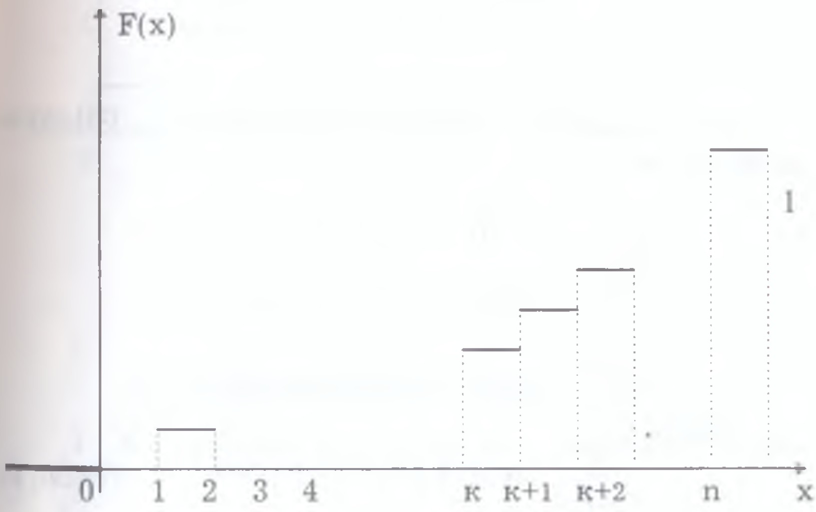
бурада C>0, σ>0, a - исə ихтијари сабитдир. Пајланма функсијасы (2) олан кəмијјəтə "нормал

ганун үзрә пајланмышдыр" дејилир.

Нәһајәт, a=0, σ=1, $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ олдугда (2)-дәки интегралалты функсија

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

функсијасына чеврилир.




Шәкил 9.

Мәсәлә 5. 4 асылы олмајан сынагларын һәр бириндә A һадисәсинин баш вермәсинин - X дискрет

тәсадүфи кәмиjjәтинин еһтималы $p = \frac{1}{3}$ олдугда онун пajланма функсиjасыны гурмалы.

Һәлли. i=0,1,2,3,4 олдугда Бернулли дүстуруна әсасән еһтималларын гиjмәтләрини тапараг ашағыдакы пajланма сырасыны гураг.

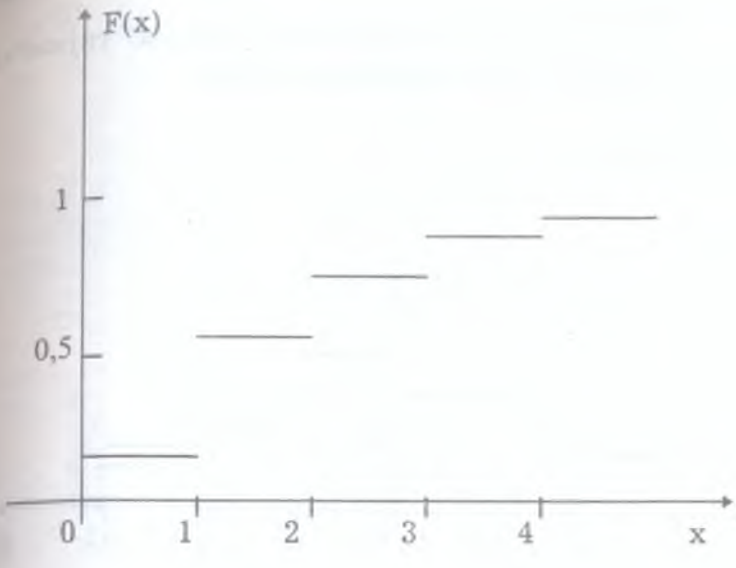
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{16}{81}$ | $\frac{32}{81}$ | $\frac{24}{81}$ | $\frac{8}{81}$ | $\frac{1}{81}$ |

Бу чәдвәлә әсасән ахтарылан пajланма функсиjасы

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{әкәр } -\infty < x \le 0 \text{ оларса}, \\ \frac{16}{81}, & \text{әкәр } 0 < x \le 1 \text{ оларса}, \\ \frac{48}{81}, & \text{әкәр } 1 < x \le 2 \text{ оларса}, \\ \frac{72}{81}, & \text{әкәр } 2 < x \le 3 \text{ оларса}, \\ \frac{80}{81}, & \text{әкәр } 3 < x \le 4 \text{ оларса}, \\ 1, & \text{әкәр } 4 < x < \infty \text{ оларса}. \end{cases}$$

кими олар.

F(x) функсиjасынын графики 10-чу шәкилдә верилмишдир.




Шәкил 10.

3. Сәрбәст ишләмәк үчүн мәсәләләр.

1. X тәсадүфи кәмијјәтинин пајланма сырасы верилиб:

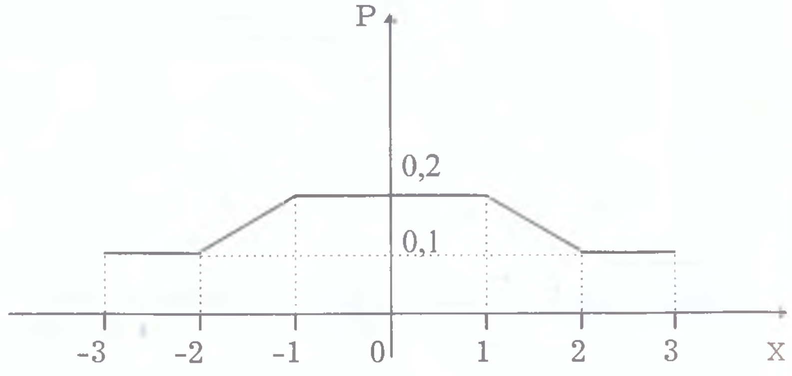
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| P | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0,1 |

а) пајланма чохбучаглысыны гурмалы;

б) F(x) пајланма функсијасыны тапмалы вә графикини гурмалы;

в) X тәсадүфи кәмијјәтинин мүтләг гијмәтчә ваһиди ашмамасы еһтималыны тапмалы.

Чаваб: а)



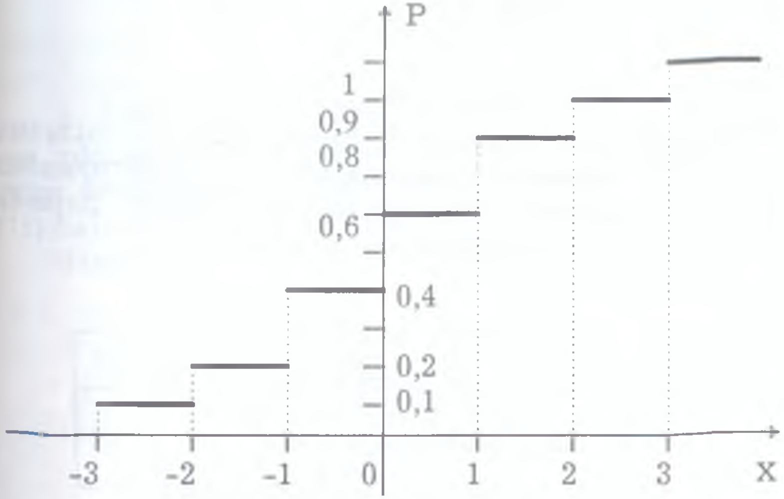

Шәкил 11.

б)

$$F(x)=\begin{cases} 0\ ; & әкәр\ -x \le -3\ оларса\ , \\ 0{,}1\ ; & әкәр\ -3 < x \le -2\ оларса, \\ 0{,}2\ ; & әкәр\ -2 < x \le -1\ оларса, \\ 0{,}4\ ; & әкәр\ -1 < x \le 0\ оларса, \\ 0{,}6\ ; & әкәр\ 0 < x \le 1\ оларса, \\ 0{,}8\ ; & әкәр\ 1 < x \le 2\ оларса, \\ 0{,}9\ ; & әкәр\ 2 < x \le 3\ оларса, \\ 1\ ; & әкәр\ x > 3\ оларса. \end{cases}$$



б)




Шәкил 11.

в)

$$P(-1 \le x \le 1) = P(x=-1) + P(x=0) + P(x=1) =$$
$$= 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}6$$

2. Гутуда 10 ағ вә 40 гара күрәчик вар. Тәсадүфи олараг гутудан бир күрәчик чыхарылыр. X тәсадүфи кәмијјәти ағ күрәчик чыхарылмасы сајыдыр. X тәсадүфи кәмијјәтинин пајланма сырасыны вә F(x) пајланма функсијасыны тапмалы.

Чаваб:

$$F(x)=\begin{cases} 0\ , & әкәр\ x \le 0\ оларса\ , \\ \frac{4}{5}\ , & әкәр\ 0 < x \le 1\ оларса, \\ 1\ , & әкәр\ x > 1\ \ оларса\ . \end{cases}$$

| X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

3. Ики атәш ачдыгда һәдәфә дәјмәнин пајланма сырасыны тапмалы вә пајланма функсијасыны гурмалы.Күлләнин бир атәшдә һәдәфә дәјмәси еһтималыны 0,4-ә бәрабәр һесаб етмәли.

Чаваб:

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P | 0,36 | 0,48 | 0,16 |

$$F(x) = \begin{cases} 0\ ; & \text{әкәр } -\infty < x \leq 0 \text{ оларса ,} \\ 0{,}36\ ; & \text{әкәр } 0 < x \leq 1 \text{ оларса,} \\ 0{,}84\ ; & \text{әкәр } 1 < x \leq -2 \text{ оларса,} \\ 1\ ; & \text{әкәр } 2 < x \leq \infty \text{ оларса .} \end{cases}$$

4. Групда 30 тәләбәдән 5-и ә"лачыдыр. Професcор лөвһәјә тәсадүфи олараг бир тәләбәни дә"вәт едир. Ә"лачы тәләбәнин лөвһәјә дә"вәт олунмасы сајы X тәсадүфи кәмијјәти олсун. X тәсадүфи кәмијјәтинин пајланма сырасыны вә F(x) пајланма функсијасыны тапмалы.

Чаваб:

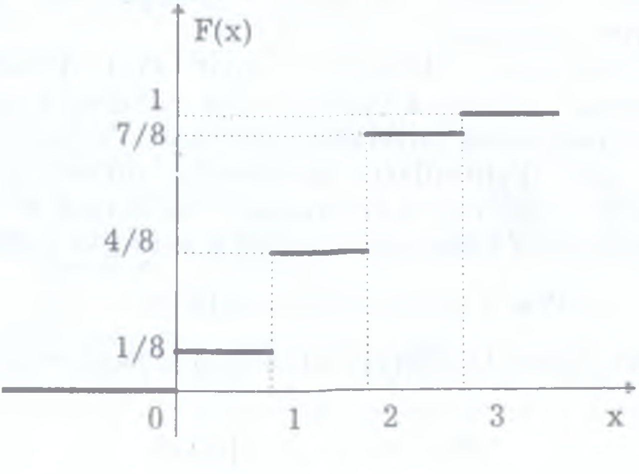
| X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P | $\frac{5}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

$$F(x) = \begin{cases} 0\ ; & \text{әкәр } -\infty < x \le 0 \text{ оларса ,} \\ \frac{5}{6}\ ; & \text{әкәр } 0 < x \le 1 \text{ оларса,} \\ 1\ ; & \text{әкәр } x > 1 \text{ оларса .} \end{cases}$$

5. Метал пул 3 дәфә атылмышдыр. "Керб" үзүнүн дүшмәси еһтималы 1/2-ә бәрабәрдирсә, X тәсадүфи кәмијјәтинин пајланма сырасыны тапмалы вә F(x) пајланма функсијасыны гурмалы.

Чаваб:

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |




Шәкил 13.

## 3.2 Еһтималларын пајланма сыхлығы. Квантил анлајышы.

### 1. Нәзәри мә"лумат.

Фәрз едәк ки, X тәсадүфи кәмијјәтинин пајланма функсијасы F(x) диференсиалланандыр вә $F'(x) = p(x)$. Бу p(x) функсијасы ашағыдакы ики шәрти өдәјир:

1) $(-\infty,+\infty)$ интервалында $p(x)\geq 0$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$.

Тә"рифдән көрүнүр ки,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt \qquad (1)$$

Бурадан исә алыныр ки, $F(+\infty)=F(x<+\infty)=1$.

$F'(x) = p(x)$ функсијасына еһтималларын пајланма сыхлығы вә јахуд диференсиал пајланма гануну дејилир.

Бунунла әлагәдар олараг F(x) функсијасына интеграл пајланма гануну вә ја тәсадүфи кәмијјәтин пајланмасынын интеграл функсијасы дејилир.

p(x) функсијасы кәсилмәјән функсија олдугда (сонлу сајда нөгтә мүстәсна ола биләр) x тәсадүфи кәмијјәтинә кәсилмәз тәсадүфи кәмијјәт дејилир.

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) \qquad (2)$$

олдуғундан (1) дүстуруна әсасән јаза биләрик:

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(t)dt \qquad (3)$$

Кәсилмәз пајланманы изаһ едәркән бә"зән квантил анлајышындан да истифадә едилир.

$$F(x)=p$$

тәнлијинин көкүнә еһтималларын верилмиш p гијмәтинә ујғун олан квантили дејилир.

$p=\frac{1}{2}$ - ә ујғун квантилә пајланманын медианы дејилир.

$p=\frac{1}{4}$ вә $p=\frac{3}{4}$ гијмәтләринә ујғун олан квантилләрә ашағы вә јухары (ујғун олараг) квантилләр дејилир.

p=0,96; p=0,89 вә с. оларса, ујғун олараг 96%, 89% вә с. квантилләр алынар. Бу квантилләрә бә"зән ујғун олараг пајланманын 4%, 11% вә с. "јухары" нөгтәләри дејилир. p=0,04; p=0,11 вә с. олдугда исә онлара ујғун квантилләрә пајланманын 4%, 11% вә с. "ашағы" нөгтәләри дејилир.

Кифајәт гәдәр квантилләри билмәклә пајланма функсијасынын артма истигамәтини тә"јин етмәк олур.

Бә"зән медиан анлајышындан пајланма мәркәзини характеризә етмәк үчүн истифадә едилир.

Емпирик пајланма үчүн медиан олараг пајланманын "орта" тәшкил едән гијмәтини нәзәрдә тутурлар. Мәсәлән, өлчүләри 5,21; 5,03; 0,92; 3,07; 4,13 олан беш әдәд "сынаг" үчүн орта - медиан 4,13 олур, чүнки онлары артма истигамәтиндә дүзсәк, өлчмәләрин нәтичәләри 0,92; 3,07; 4,13; 5,03; 5,21 кими дүзүләр вә "орта" тәшкил едән өлчү 4,13 олур.

2. Мәсәлә һәлли нүмунәләри.

Мәсәлә 1. Мүнтәзәм пајланма. Тутаг ки, һәр һансы X тәсадүфи кәмијјәти үчүн

$$p(x)=\begin{cases} C, & x \in [a,в] \quad \text{олдугда;} \\ 0, & x \notin [a,в] \quad \text{олдугда} . \end{cases}$$

Белә олдугда дејирләр ки, X тәсадүфи кәмијјәти мүнтәзәм ганунла пајланмышдыр (шәкил 14).

2) шәртинә әсасән

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

олмалыдыр. Бу исә о демәкдир ки,

$$\int_{-\infty}^{a} p(x)dx + \int_{a}^{в} p(x)dx + \int_{в}^{\infty} p(x)dx = 1$$

$$\int_{a}^{в} p(x)dx = 1 \ ; \quad C \cdot \int_{a}^{в} dx = 1 \ ; \quad C = \frac{1}{в-a} \ .$$

Демәли, мүнтәзәм пајланма үчүн диференсиал пајланма функсијасы

$$p(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{в-a}, & x \in [a,в] \ \text{олдугда;} \\ 0 \ , & x \notin [a,в] \ \text{олдугда} . \end{cases}$$

Инди мүнтәзәм пајланма үчүн интеграл пајланма функсијасыны тапаг.

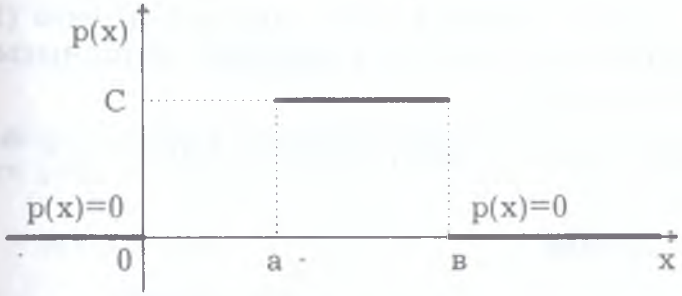
(1) дүстуруна әсасән

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{a}^{x} p(t)dt = \frac{x-a}{в-a} \quad (x \in [a,в] \ \text{олса}) \ ;$$

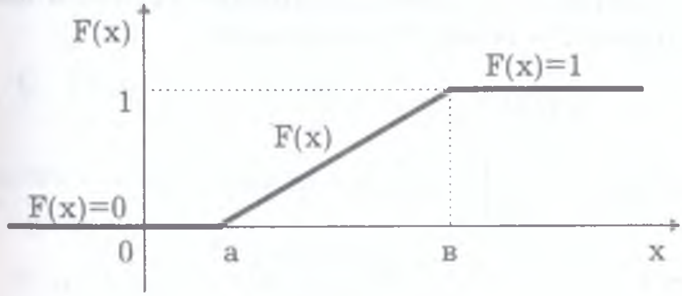
$F(a)=0$; $F(x)=0$ $(x \leq 0)$; $F(в)=1$; $F(x)=1$ $(x \geq в)$ (бах, шәкил 15).

Јә"ни

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & x \leq a \ \text{олдугда;} \\ \dfrac{x-a}{в-a}\,, & a \leq x \leq в \ \text{олдугда;} \\ 1\,, & x \geq в \ \text{олдугда}. \end{cases}$$




Шәкил 14.




Шәкил 15.

Мәсәлә 2. Үстлү пајланма. X тәсадүфи кәмијјәти үчүн

$$p(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0 \text{ олдугда;}\\ \sigma\cdot e^{-\sigma x} & , \quad x\geq 0 \text{ олдугда } (\sigma>0)\end{cases}.$$

олдугда дејирләр ки, бу кәмијјәт үстлү ганун үзрә пајланмышдыр.

Ајдындыр ки, $p(x)\geq 0$;

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=\sigma\cdot\int_{0}^{\sigma}e^{-\sigma x}dx=\sigma\cdot\lim_{в\to\infty}\int_{0}^{в}e^{-\sigma t}dt=1-\lim_{в\to\infty}e^{-\sigma в}=1\ ;$$

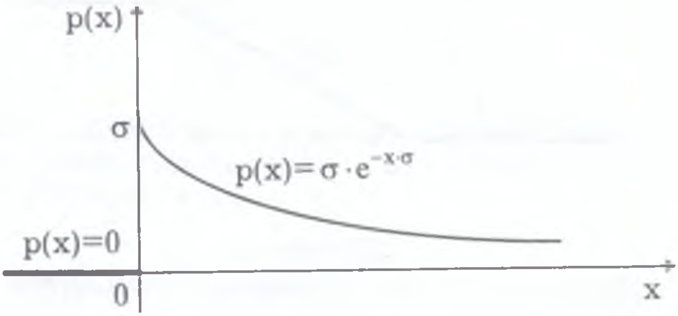
Нәзәри һиссәдә (1-чи параграфда) онда (1) дүстуруна әсасән интеграл пајланма функсијасыны да тапмаг олар:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int_{-\infty}^{0}p(t)dt+\int_{0}^{x}p(t)dt=\int_{0}^{x}p(t)dt=1-e^{-\sigma x}\ (x>0)$$

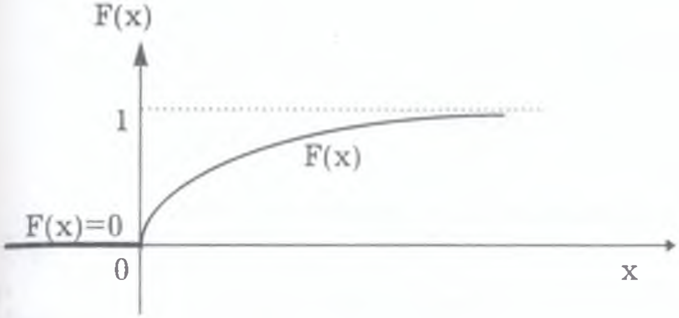
Демәли,

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \ x<0 \text{ оланда;}\\ 1-e^{-\sigma x} & , \ x\geq 0 \text{ оланда.}\end{cases}$$

p(x) вә F(x) функсијаларынын графики шәкил 16 вә шәкил 17-дә көстәрилмишдир.




Шәкил 16.




Шәкил 17.

Мәсәлә 3. Елә тәсадүфи кәмијјәт фикирләшин ки, онун үчүн

$$p(x) = C \cdot \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

олсун. Белә пајланма функсијасы олан кәмијјәтә нормал ганун үзрә пајланмыш кәмијјәт, пајланманын өзүнә исә нормал пајланма дејилир. Бураја дахил олан C сабити белә тапылыр:

$$C \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1$$

$x-a=\sigma \cdot t$ әвәзләмәсини апармагла ашағыдакыны алырыг:

$$C \cdot \sigma \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = 1$$

Лакин

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \sqrt{2\pi}$$

олдуғундан

$$C \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi} = 1 \ , \qquad C = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

олур.

Демәли, нормал пајланма үчүн

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) \ .$$

p(x) функсијасы x=a нөгтәсиндә максимум гијмәт алыр:

$$\max \ p(x) = p(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \ .$$

$x = a \pm \sigma$ нөгтәләри p(x) функсијасы үчүн әјилмә нөгтәләридир. $x \to \pm\infty$-да абсис оху p(x) функсијасы үчүн асимптотдур.

Мәсәлә 4. X кәсилмәз тәсадүфи кәмијјәтинин пајланма функсијасы верилмишдир:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \le 0 \ , \\ \sin 3x \ , & 0 < x \le \frac{\pi}{6} \ , \\ 1 \ , & x > \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

p(x) сыхлыг функсијасыны тапын.

Һәлли. Сыхлыг функсијасы пајланма функсијасынын биринчи тәртиб төрәмәсинә бәрабәрдир:

$$p(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 3\cos 3x, & 0<x\le \frac{\pi}{6},\\ 0, & x>\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

Гејд едәк ки, x=0 олдугда $F'(x)$ төрәмәси јохдур.

Мәсәлә 5. X кәсилмәз тәсадүфи кәмијјәти $p(x)=\frac{3}{2}\sin x$ сыхлыг функсијасы илә $(0,\pi)$ интервалында верилмишдир. Бу интервал харичиндә $p(x)=0$-дыр. X-ин $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ интервалында гијмәт алмасы еһтималыны тапын.

Һәлли.

$$P(a<x<в)=\int_a^в p(x)dx$$

дүстурундан истифадә едәк. Шәртә көрә $a=\frac{\pi}{2}$, $в=\frac{3\pi}{4}$,

$$p(x)=\frac{3}{2}\sin x$$

Беләликлә, ахтарылан еһтимал

$$P\left(\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}\cdot\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\sin x dx=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

олур.

### 3. Сәрбәст ишләмәк үчүн мәсәләләр.

1. Кәсилмәз тәсадүфи кәмијјәтин пајланма функсијасы верилмишдир:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ (x-2)^2, & 2\le x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$

а) p(x) сыхлыг функсијасыны;

б) X кәсилмә тәсадүфи кәмијјәтинин (1;2,5) интервалында гијмәт алмасы еһтималыны;

в) (2,5;3,5) интервалында гијмәт алмасы еһтималыны тапмалы.

Ҹаваб: а)

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ 2(x-2), & 2\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$$

б) P=0,25 ; в) P=0,75

2. X кәсилмәз тәсадүфи кәмијјәтин сыхлыг функсијасы

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{c}{x^4}, & x\ge 1, \quad c>0\end{cases}$$

бәрабәрлији илә верилмишдир.

а) сабит c параметрини;

б) y=F(x) пајланма функсијасыны;

в) $P(0{,}5<X<0{,}75)$-ни тапмалы.

Ҹаваб: а) c=3;

б) $F(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 1\,, \\ 1 - \dfrac{1}{x^3}\,, & x \ge 1\,, \end{cases}$

в) $P(0{,}5 < X < 0{,}75) = 0{,}117731$ .

3. X кәсилмәз тәсадүфи кәмиjjәтин сыхлыг функсиjасы верилмишдир:

$$p(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 1\,, \\ x - \dfrac{1}{2}\,, & 1 \le x \le 2\,, \\ 0\,, & x > 2 \end{cases}$$

F(x) паjланма функсиjасыны тапмалы.

Чаваб:

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 1\,, \\ \dfrac{1}{2}(x^2 - x)\,, & 1 \le x \le 2\,, \\ 0\,, & x > 2 \end{cases}$$

4. P нөгтәси ваһид ABCD квадратында мүнтәзәм паjланмышдыр. B′ вә D′ нөгтәләри P нөгтәсиндән уjғун олараг AB вә AD тәрәфләринә ендирилмиш перпендикулjарларла һәмин тәрәфләрин кәсишмә нөгтәләридирсә, AB′PD′ дүзбучаглысынын саһәсиндә X тәсадүфи кәмиjjәтинин паjланма сыхлығыны тапмалы.

Чаваб: p(x)=-lnx (0<x<1)

5. X кәсилмәз тәсадүфи кәмијјәтин сыхлыг функсијасы $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ интервалында p(x)=C·cos3x-ә бәрабәрдир. Бу интервал харичиндә исә p(x)=0. C параметрини тапмалы.

Чаваб: C=3.

6. C сабитинин һансы гијмәтиндә

$$f(x)=\frac{C}{e^{x}+e^{-x}}$$

сыхлыг функсијасы олар?

Чаваб: $C=\frac{2}{\pi}$.

## 3.3. Тәсадүфи кәмијјәтин әдәди характеристикалары.

### 1. Нәзәри мә"лумат.

1. Пајланма функсијасы тәсадүфи кәмијјәт һаггында там тәсәввүр јаратмаға имкан верир. Лакин бир чох һалларда тәсадүфи кәмијјәт һаггында белә чох мә"лумата еһтијач олмур вә о кәмијјәт һаггында бир нечә характеристик әдәдләри билмәк тамамилә кифајәт едир. Мәсәлән:

1) Елә бир мәркәз тапмалы ки, тәсадүфи кәмијјәтин бүтүн мүмкүн гијмәтләри онун әтрафында сәпәләнмиш олсун;

2) Тәсадүфи кәмијјәтин мүмкүн гијмәтләринин һәмин мәркәз әтрафында нечә сәпәләндијини, онларын сәпәләнмә сыхлығыны нечә характеризә етмәк мүмкүн олсун.

Бу мәсәләләрдән биринчиси "Ријази көзләмә",

икинчиси исә "Дисперсија" адланан характеристикалар васитәсилә һәлл олунур.

2. Әввәлчә "Ријази көзләмә" анлајышы үзәриндә дајанаг.

Тутаг ки, дискрет типли X тәсадүфи кәмијјәтинин пајланмасы верилмишдир (чәдвәл 1).

Чәдвәл 1

| X-ин мүмкүн гијмәтләри | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| ујғун еһтималлар | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

Онда

$$MX = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_n \cdot p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k \qquad (1)$$

әдәдинә X кәмијјәтинин ријази көзләмәси дејилир. Әкәр X-ин гијмәтләри $\{x_k\}_1^{\infty}$ кими ардычыллыг әмәлә кәтирсәләр вә

$$p_k = P(x = x_k) \quad (k = 1,2,\ldots)$$

оларса, онда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \cdot p_k$$

сырасынын јығылан олмасы шәрти дахилиндә

$$MX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k \qquad (2)$$

әдәдинә X кәмијјәтинин ријази көзләмәси дејилир.

Ријази көзләмәни бә"зән EX, $\overline{X}$,... кими дә ишарә едирләр.

X кәсилмәз типли тәсадүфи кәмиjjәт, p(x) исә онун диференсиал паjланма функсиjасы вә

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot p(x)dx \qquad (3)$$

интегралы jығылан оларса, X-ин риjази көзләмәси

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)dx \qquad (4)$$

дүстуру илә тә"jин олунур.

Көрүндүjү кими, (3) интегралы jығылан олмадыгда уjғун тәсадүфи кәмиjjәтин риjази көзләмәси олмур.

Гејд едәк ки, (1), (2), (4) тә"рифләрини Стилтjес интегралы васитәсилә бир дүстур һалында бирләшдирмәк олар (Стилтjес интегралы барәдә, бах: [1], V фәсил):

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot dF(x) \qquad (5)$$

3. Риjази көзләмәнин бир нечә хассәсинин гејд едәк.

1) Истәнилән C сабити үчүн MC=C;
2) Истәнилән C сабити үчүн M(CX)=CM(X);
3) У=кX+в (к вә в сабитләрдир!) исә, онда
$$MУ=к \cdot MX+в \;;$$
4) M(X+У)=MX+MУ;
5) X вә У асылы олмаjан тәсадүфи кәмиjjәтләрдирсә, онда M(X·У)=MX·MУ;
6) $M(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = MX_1 + MX_2 + \cdots + MX_n$ .

4. Инди дә "Дисперсиjа" анлаjышы үзәриндә даjанаг([1], сәh. 105).

Фәрз едәк ки, MX=a вә У=X-a. Онда MY=0 олур. Әкәр X дискрет типли исә, онда

$$MY = \sum_k (x_k - a) \cdot p_k \quad ,$$

$$p_k = P(x = x_k) = P(x - a = x_k - a)$$

Әкәр MY-и тә"јин едән чәм сыфра бәрабәр олса:

$$\sum_k (x_k - a) \cdot p_k = 0 \qquad (6)$$

оларса, бу о демәк олар ки, чәмдә иштирак едән топлананлар мүхтәлиф ишарәлидирләр: бә"зиләри мәнфи, бә"зиләри исә мүсбәт. Јә"ни к-нын бә"зи гијмәтләриндә $x_k - a < 0$, бә"зи гијмәтләриндә исә $x_k - a > 0$. Бу исә о демәкдир ки, к-нын бә"зи гијмәтләриндә $x_k < a$, бә"зи гијмәтләриндә исә $x_k > a$, јә"ни х-ин гијмәтләриндән бә"зиләри а мәркәзиндән солда, бә"зиләри исә а мәркәзиндән сағда јерләшир. Бурадан да көрүнүр ки, MY=M(X-a)=0 олмасы X-ин гијмәтләринин a=MX мәркәзи әтрафында нечә сәпәләндијини, онларын бир-биринә јахынлыг дәрәчәсини характеризә етмәјә имкан вермир.

Инди $Y = (X - a)^2$ кәмијјәтинә бахаг (a=MX).

$$MY = M(X - a)^2 = \sum_k (x_k - a) \cdot p_k \qquad (7)$$

бәрабәрлијиндән көрүнүр ки, MY=0 анчаг вә анчаг о заман олар ки, X-ин бүтүн гијмәтләри бир-биринә бәрабәр олсун

$$x = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \cdots = a \quad .$$

Бу исә о демәкдир ки, X тәсадүфи дејил, сабит кәмијјәтдир. Әкәр бу һалы истисна етсәк, онда MY>0 олур. Демәли, бу дәфә MY-ин сыфра нә гәдәр јахын

олдуғундан, онун анчаг кичиклик дәрәчәсиндән данышмаг олар.

(7) бәрабәрлијиндән көрүнүр ки, MY-ин кичик олмасы үчүн $|x_k - a|$ фәргләри кичик олмалыдыр, јә”ни $x_k$ гијмәтләри а мәркәзинә, демәли, һәм дә бир-биринә чох јахын олмалыдыр.

Дејиләнләрдән көрүнүр ки, тәсадүфи кәмијјәтин гијмәтләринин a=MX мәркәзи әтрафында нә дәрәчә сых, бир-биринә јахын олмасы үчүн $M(X-a)^2$ кәмијјәти васитәсилә характеризә олуна биләр. Буна да әсасланараг белә тә”риф вермәк олар:

Тә”риф. $M(X-a)^2$ әдәдинә X тәсадүфи кәмијјәтинин дисперсијасы дејилир вә $DX$, јахуд $\sigma_x^2$ кими ишарә едилир:

$$DX = \sigma_x^2 = M(X-a)^2 \ . \qquad (8)$$

X дискрет типли исә, онда

$$DX = \sum_k (x_k - a)^2 \cdot p_k \qquad (9)$$

X кәсилмәз типли исә, онда

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (X-a)^2 \cdot p(x)dx \qquad (10)$$

олур.

$$M(X-a)^2 = M(X^2 - 2a \cdot X + a^2) = M(X^2) - 2a \cdot MX + a^2 =$$

$$= M(X^2) - a^2 = M(X^2) - (MX)^2$$

олдуғундан

$$DX = M(X^2) - (MX)^2 \qquad (11)$$

дустуру алынyр.

Јухарыда дејиләнләрдән көрүнүр ки, $X \neq const$ олдугда

$$M(X^2) > (MX)^2 \qquad (12)$$

олур.

Дисперсијанын да бир сыра хассәләри вардыр:

1) Ихтијари C сабити үчүн $DC = 0$;

2) $D(C \cdot X) = C^2 \cdot DX$ ; $D(-X) = D(X)$;

3) Асылы олмајан X вә Y тәсадүфи кәмијјәтләри үчүн

$$D(X \pm Y) = DX + DY \ ;$$

4) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ кәмијјәтләри јердә галанларын чәминдән асылы дејилсә (вә ја бу кәмијјәтләр чүт-чүт асылы дејилләрсә), онда

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = DX_1 + DX_2 + \cdots + DX_n$$

5) $D(X \cdot Y) = M(X^2) \cdot M(Y^2) - (MX)^2 \cdot (MY)^2$

5. $\sigma_x = \sqrt{DX}$ кәмијјәтинә X тәсадүфи кәмијјәтинин орта квадратик мејли дејилир.

$$\gamma_x = \frac{\sigma_x}{MX} \cdot 100\% \qquad (13)$$

әдәдинә X кәмијјәтинин вариасија әмсалы дејилир.

$$Cov(X, Y) = M[(X - a) \cdot (Y - b)] = \mu_{xy} \qquad (14)$$

кәмијјәтинә X вә Y арасындакы әлагәнин ковариасијасы дејилир.

## 2. Мәсәлә һәлли нүмунәләри.

Мәсәлә 1. Нормал пајланма. Мә”лумдур ки, нормал пајланманын пајланма сыхлығы

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad , \quad a=MX .$$

Тә”рифә көрә,

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \cdot p(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \cdot \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

Бурада x-a=σt əвəзлəмəси апарсаг $DX = \sigma^2$ олар.

Демәли, p(x)-ин ифадәсиндә иштирак едән a вә σ кәмијјәтләриндән бири a=MX, дикәри исә $\sigma = \sigma_x = \sqrt{DX}$ .

Мәсәлә 2. Характеристик тәсадүфи кәмијјәт.

Елә μ тәсадүфи кәмијјәти тәсәввүр едәк ки, о анчаг ики дәнә гијмәт ала билир: 0 вә 1, белә ки, A һадисәси баш вердикдә μ=1, вермәдикдә исә μ=0 олур. Белә кәмијјәтә характеристик кәмијјәт дејилир.

$$P(\mu = 1) = p \ , \quad P(\mu = 0) = q$$

олсун. Онда

$$M\mu = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p \ , \quad M\mu = p .$$

$1^2=1$, $0^2=0$ олдуғундан

$$P(\mu^2 = 1^2) = p \ , \quad P(\mu^2 = 0^2) = q$$

олур вә дисперсијанын һесабланмасы үчүн (11) дүстурундан истифадә етсәк, көрәрик:

$$D\mu = M(\mu^2) - (M\mu)^2 = p - p^2 = p(1-p) = p \cdot q \quad (q = 1 - p).$$

Мәсәлә 3. <u>Биномал пајланма</u>. Мә"лум олдуғу кими биномал пајланма үчүн X=m олур вә орада n дәфә ардычыл тәкрар олунан сынаглардан сөһбәт кедир,һәр бир сынаг үчүн P(A)=p, $P(\overline{A}) = q$; $0 \leq m \leq n$.

Бу серијаја дахил олан ваһид сынагларын характеристик функсијаларыны $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ илә ишарә етсәк,

$$m = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$$

олар вә буна көрә дә

$$Mm = M\mu_1 + M\mu_2 + \cdots + M\mu_n = np \;,$$

$$Dm = D\mu_1 + D\mu_2 + \cdots + D\mu_n = npq \;.$$

Мәсәлә 4. <u>Нисби тезлик</u>. Мә"лум олдуғу кими $\upsilon = \frac{m}{n}$ кәмијјәтинә нисби тезлик дејилир. Онда

$$M\upsilon = M\frac{m}{n} = \frac{1}{n} \cdot Mm = \frac{1}{n} \cdot n \cdot p = p \;; \; M\upsilon = p \;;$$

$$D\upsilon = D\frac{m}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot Dm = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot pq = \frac{pq}{n} \;; \quad D\upsilon = \frac{pq}{n} \;;$$

$$\sigma_\upsilon = \sqrt{D\upsilon} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sigma_{m/n} \;.$$

Мәсәлә 5. Ашағыдакы пајланма ганунуна әсасән верилмиш X дискрет тәсадүфи кәмијјәтинин ријази көзләмәсини тапын.

| X | -3 | 5 | 9 |
|---|---|---|---|
| P | 0,3 | 0,4 | 0,4 |

Һәлли. Ријази көзләмә X-ин бүтүн мүмкүн гијмәтләринин онларын еһтималларына олан һасилләри чәминә бәрабәрдир:

$$M(X)=-3\cdot 0,3+5\cdot 0,4+9\cdot 0,4=4,7$$

Мәсәлә 6. Әкәр M(X)=4, M(Y)=5 олдуғу мә"лумдурса, онда Z=X+3Y тәсадүфи кәмијјәтинин ријази көзләмәсини тапын.

Һәлли. Ријази көзләмәнин хассәләриндән (чәмин ријази көзләмәси топлананларын ријази көзләмәләрини чәминә бәрабәрдир; сабити ријази көзләмәнин гаршысына чыхармаг олар) истифадә етсәк аларыг:

$$M(Z)=M(X+3Y)=M(X)+M(3Y)=M(X)+3M(Y)=$$

$$=4+3\cdot 5=19\ .$$

Мәсәлә 7. X тәсадүфи кәмијјәтинин ала биләчәји гијмәтләр верилмишдир: $x_1=-0,2$; $x_2=0$; $x_3=1$, һәмчинин бу дисрет тәсадүфи кәмијјәтин вә онун квадратынын ријази көзләмәси мә"лумдур:

$$M(X)=-0,2;\ \ M(X^2)=1,2$$

$x_1$, $x_2$, $x_3$ гијмәтләринин ујғун олараг $p_1$, $p_2$, $p_3$ еһтималларыны тапын.

Һәлли. X кәмијјәтинин ала биләчәји бүтүн гијмәтләрин еһтималлары чәми ваһидә бәрабәр, һәмчинин M(X)=-0,2; $M(X^2)=1,2$ олдуғуну нәзәрә алсаг, мә"лум олмајан еһтималлара көрә үч хәтти тәнликләр системи јаза биләрик:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ (-2) \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 = -0,2 \\ (-2)^2 \cdot p_1 + 0^2 \cdot p_2 + 2^2 \cdot p_3 = 1,2 \end{cases}$$

Бу системи һәлл едәрәк ахтарылан еһтималлары тапырыг:

$p_1$=0,2 ; $p_2$=0,7 ; $p_3$=0,1 .

Мәсәлә 8. Лотерејада 100 билетдә дәјәри 210 манат вә 60 манат олан ики шеј ојнадылыр. а) бир билети; б) ики билети олан адамын удуш чәминин пајланма ганунуну тәртиб етмәли. Ријази көзләмәнин дөрдүнчү хассәсинин асылы тәсадүфи кәмијјәтләр үчүн доғрулуғуна инандырмалы.

Һәлли. а) бир билети олан адам ола биләр ки, һеч удмасын (јә"ни чәми 0-ра бәрабәрдир), 60 манат, јада 210 манат удсун. Бу мүмкүн һалларын еһтималлары ујғун олараг 0,98; 0,01 вә 0,01-ә бәрабәрдир. Бир билети олан адам үчүн удуш чәминин пајланма гануну ашағыдакы кимидир:

| Удуш чәми | 0 | 60 | 210 |
|---|---|---|---|
| Еһтимал | 0,98 | 0,01 | 0,01 |

б) Тутаг ки, X вә Y - биринчи вә икинчи билетин удуш мигдарыны ифадә едән тәсадүфи кәмијјәтләрдир. Онлар асылыдырлар вә пајланма ганунлары ејнидир ("а" бәндиндә алындығы кими). Мәсәләнин һәлли X+Y тәсадүфи кәмијјәтинин пајланма ганунунун тәртибиндәдир (чәдвәл 1).

Шәртә көрә 210 манат удуш јалныз бир дәнә олдуғу үчүн биринчи билет 210 манат удмаг шәрти илә икинчи билетин 210 манат удмасы еһтималы 0-а бәрабәрдир. Буна көрә дә 210+210 мүмкүн олан

Чәдвәл 1.

| N | X | Y | X+Y | уjғун нәтичәнин еһтималы |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 210 | 210 | 420 | $0,01 \cdot 0 = 0$ |
| 2 | 210 | 60 | 270 | $\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{99} = \frac{1}{9900}$ |
| 3 | 210 | 0 | 210 | $\frac{1}{100} \cdot \frac{98}{99} = \frac{49}{4950}$ |
| 4 | 60 | 210 | 270 | $\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{99} = \frac{1}{9900}$ |
| 5 | 60 | 60 | 120 | $0,01 \cdot 0 = 0$ |
| 6 | 60 | 0 | 60 | $\frac{1}{100} \cdot \frac{98}{99} = \frac{49}{4950}$ |
| 7 | 0 | 210 | 210 | $\frac{98}{100} \cdot \frac{1}{99} = \frac{49}{4950}$ |
| 8 | 0 | 60 | 60 | $\frac{98}{100} \cdot \frac{1}{99} = \frac{49}{4950}$ |
| 9 | 0 | 0 | 0 | $\frac{98}{100} \cdot \frac{97}{99} = \frac{4753}{4950}$ |
| 10 | | | | |

һалын еһтималы 0-а бәрабәрдир. Һәмчинин 60+60 мүмкүн олан һалын еһтималы да 0-а бәрабәрдир. Галан һалларда асылы һадисәләр үчүн еһтималларын һасили теоремини тәтбиг етмәклә 0-дан фәргли гиjмәтләр алырыг. X+Y тәсадүфи кәмиjjәтинин паjланма гануну ашағыдакы шәкилдә олур:



| Удуш чәми | 0 | 60 | 210 | 270 |
|---|---|---|---|---|
| Еһтимал | $\frac{4753}{4950}$ | $\frac{49}{2475}$ | $\frac{49}{2475}$ | $\frac{1}{4950}$ |

Асанлыгла һесабламаг олар ки,

$$M(X)=M(Y)=2,7; \quad M(X+Y)=5,4=M(X)+M(Y) ,$$

jә"ни риjази көзләмәнин дөрдүнчү хассәси асылы тәсадүфи кәмиjjәтләр үчүн дә догрудур.

Мәсәлә 9. Фәһлә бир сырада бир-бириндән a мәсафәсиндә jерләшмиш n еjни типли дәзкаһа бахыр. Һәр һансы бир дәзкаһа хидмәти гуртардыгдан сонра фәһлә о бириләриндән әввәл хидмәт тәләб едән дәзкаһа кечир. Фәһләнин кечиш узунлуғунун риjази көзләмәсини тапмалы.

Һәлли. Һәр һансы бир дәзкаһын фәһләнин диггәтини чәлб етмәси еһтималы $\frac{1}{n}$-ә бәрабәрдир, чүнки бу еһтимал һәр бир n дәзкаһ үчүн еjнидир. Әкәр фәһлә биринчи дәзкаһын jанындадырса, онда онун кечиши 0,a,2a,...,(n-1)a - уjғун олараг биринчи дәзкаһдан икинчиjә, икинчидән үчүнчүjә,..., n-чи дәзкаһа гәдәр олан мәсафә бәрабәр олар (еһтималы $\frac{1}{n}$-ә бәрабәр). Әкәр фәһлә икинчи дәзкаһын jанындадырса,онун кечиши һәр биринин еһтималы $\frac{1}{n}$ олан a,0,...,(n-2)a мәсафәләри олар. $\frac{1}{n}$ еһтималы илә фәһлә үчүнчү дәзкаһын jанында ола биләр, онун кечишләри һәр биринин еһтималы $\frac{1}{n}$ олан 2a,a,0,...,(n-3)a

мәсафәләри ола биләр вә с. Она көрә дә фәhләнин кечиш узунлугларынын ријази көзләмәси (ортаг вуруғу мө"тәризә харичинә чыхарандан сонра) ашағыдакы кими олур:

$$M(L)=\frac{a}{n^2}[0+1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+$$
$$+1+0+1+2+\cdots+(n-3)+(n-2)+$$
$$+2+1+0+1+\cdots+(n-4)+(n-3)+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(n-2)+(n-3)+(n-4)+(n-5)+\cdots+0+1+$$
$$+(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4)+\cdots+1+0]$$

Бу чәм 0-лардан тәшкил олунмуш диагонала көрә симметрикдир. Буна көрә дә 0 диагоналын бир тәрәфиндә дуран hәдләрин икигат чәминә бәрабәрдир:

$$M(L)=\frac{2a}{n^2}[1+$$
$$+2+1+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(n-2)+(n-3)+\cdots+1+$$
$$+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1]$$

Бурада hәр бириндә әдәди силсиләнин hәдләри чәми дуран n-1 сәтир вар. Биринчи сәтирдә 0 бир hәддән ибарәтдир, ахырынчыда исә n-1 hәддән ибарәтдир. Сәтир-сәтир чәмләсәк, аларыг:

$$M(L)=\frac{2a}{n^2}\left\{\frac{(1+1)\cdot 1}{2}+\frac{(1+2)\cdot 2}{2}+\cdots+\right.$$



$$\left.+\frac{[1+(n-2)]\cdot(n-2)}{2}+\frac{[1+(n-1)]\cdot(n-1)}{2}\right\}=$$
$$=\frac{a}{n^2}\{[1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)]+$$
$$+[1^2+2^2+\cdots+(n-2)^2+(n-1)^2]=$$
$$=\frac{a}{n^2}\left\{\frac{[1+(n-1)]\cdot(n-1)}{2}+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(2n-1)}{6}\right\},$$

бурада, биринчи чәми hесабламаг үчүн әдәди силсиләнин hәдләринин чәми дүстуру, икинчи чәми hесабламаг үчүн исә 1-дән (n-1) дахил олмагла (n-1)-ә гәдәр натурал әдәдләр сырасынын hәдләри квадратынын чәми дүстуру тәтбиг олунур. Сонракы чевирмәләр ашағыдакыны верир:

$$M(L)=\frac{a^2(n^2-1)}{3n}$$

Мәсәлә 10. X тәсадүфи кәмиј̆јәти еhтималлары азалан hәндәси силсилә олан 0,1,2,...,n гијмәтләрини алыр. Онун n-и ашмајан гијмәт алмасы еhтималыны тапын.

Һәлли. Тутаг ки, $p_0$ - hәндәси силсиләнин биринчи hәдди, q - вуруғудур. Тәсадүфи кәмиј̆јәтин пајланма гануну беләдир:

| Гијмәти | 0 | 1 | 2 | ... | n |
|---|---|---|---|---|---|
| Еhтималы | $p_0$ | $p_0q$ | $p_0q^2$ | ... | $p_0q^n$ |

Онда

$$p_0+p_0q+p_0q^2+\ldots+p_0q^n+\cdots=\frac{p_0}{1-q}=1$$

(Сонсуз азалан һәндәси силсиләнин һәдләри чәми дүстуру тәтбиг едилмишдир), бурада $q = 1 - p_0$ вә ја $p_0 = 1 - q$

$$P(X \le n) = \sum_{i=0}^{n} p_0 q^i = \frac{p_0 + p_0 q^n \cdot q}{1-q} =$$

$$= \frac{(1 - q^{n+1}) \cdot p_0}{1-q} = 1 - q^{n+1}$$

Мәсәлә 11. Беш зәри 20 дәфә атдыгда һәр сынагда зәрин икисиндә ејни халын дүшмәсини көстәрән X дискрет тәсадүфи кәмијјәтинин ријази көзләмәсини тапын.

Һәлли. Ашағыдакы дүстурдан истифадә едәк:

$$M(X)=np ,$$

бурада n - сынагларын үмуми сајы (беш зәрин атылмасы); X әдәди - n сынагда бизи марагландыран һадисәнин (беш зәрин икисиндә ејни халын дүшмәси) баш вермәси сајы; p - бир сынагда бахылан һадисәнин баш вермәси еһтималыдыр.

Шәртә көрә n=20. Беш зәрдән икисиндә ејни халын дүшмәси еһтималыны - p-ни тапмаг галыр. Бир зәрдә бир халын дүшмәси еһтималы p=1/6 вә беләликлә, дүшмәмәсинин еһтималы $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ олдуғуну нәзәрә алараг, p еһтималыны Бернулли дүстуруна әсасән һесаблајаг:

$$p = P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 5^2}{1 \cdot 2 \cdot 6^2} = \frac{5^4}{3 \cdot 6^4}$$

Ахтарылан ријази көзләмә

$$M(X) = np = \frac{20 \cdot 5^4}{3 \cdot 6^4} \approx 3$$

Мәсәлә 12. Гурғу n елементдән ибарәтдир. Тәчрүбә вахты ихтијари елементин сырадан чыхмасы еһтималы Р-јә бәрабәрдир. Апарылан N тәчрүбәнин һәр бириндә дүз m елементин сырадан чыхмасыны көстәрән кәмијјәтин ријази көзләмәсини тапын. Фәрз едилир ки, апарылан тәкрүбәләр бир-бириндән асылы дејилләр.

Һәлли. Дүз m елементин сырадан чыхдығы сынагларын сајыны Х илә ишарә едәк. Сынаглар асылы олмадығына көрә вә бу сынагларда (бир сынагда дүз m елемент сырадан чыхмышдыр) бизи марагландыран һадисәләрин еһтималлары ејни олдуғуна көрә ашағыдакы дүстуру тапмаг олар:

$$M(X)=NP \quad (1)$$

бурада N - сынагларын үмуми сајы; Р - бир сынагда дүз m елементин сырадан чыхмасынын еһтималыдыр.

Бернулли дүстуруна әсасән Р еһтималыны тапаг:

$$P = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (2)$$

(2)-ни (1)-дә нәзәрә алсаг, ахтарылан ријази көзләмәни тапарыг:

$$M(X) = N \cdot P = NC_n^m p^m q^{n-m} \quad (3)$$

Мәсәлә 13. Верилмиш пајланма ганунуна әсасән Х дискрет тәсадүфи кәмијјәтинин дисперсијасыны вә орта квадратик мејлини тапын:

| X | 2 | 3 | 5 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,1 | 0,1 | 0,5 | 0,3 |

Һәлли. Дисперсијаны тә"рифә әсасән һесабламаг олар. Лакин биз мәгсәдә тез кәтирән дүстурдан истифадә едәҹәјик:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 \quad .$$

X-ин ријази көзләмәсини тапаг:

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}3 = 4{,}2$$

$X^2$ - нын пајланма ганунуну јазаг:

| $X^2$ | 4 | 9 | 25 | 16 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,1 | 0,1 | 0,5 | 0,3 |

$X^2$-нын ријази көзләмәсини тапаг:

$$M(X^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}5 + 16 \cdot 0{,}3 = 18{,}6$$

Ахтарылан дисперсијаны тапаг:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 18{,}6 - (4{,}2)^2 = 0{,}96$$

Ахтарылан орта квадратик мејли тапаг:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}96} \approx 0{,}98 \quad .$$

Мәсәлә 14. X дискрет тәсадүфи кәмијјәти мүмкүн олан анҹаг ики $x_1$ вә $x_2$ гијмәтинин ($x_2 > x_1$) ола билир. X-ин $x_1$ гијмәтини алмасы еһтималы 0,6-ја бәрабәрдир. X кәмијјәтинин пајланма ганунуну тапын, беләки, X-ин ријази көзләмәси вә дисперсијасы мә"лумдур:

$$M(X)=3{,}2 \ ; \quad D(X)=2{,}16$$

Һәлли. Дискрет тәсадүфи кәмијјәтин бүтүн мүмкүн гијмәтләринин еһтималлары ҹәми ваһидә

бәрабәр олдуғу үчүн, X-ин $x_2$ гијмәтини алмасы еһтималы 1-0,6=0,4-ә бәрабәрдир. X-ин пајланма ганунуну јазаг:

| X | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| P | 0,6 | 0,4 |

(*)

$x_1$ вә $x_2$-ни тапмаг үчүн бу әдәдләри әлагәләндирән ики тәнлик тәртиб етмәк лазымдыр. Бунун үчүн мә"лум олан ријази көзләмәни вә дисперсијаны $x_1$ вә $x_2$ илә ифадә едәк. M(X)- и тапаг:

$$M(X)=0,6x_1+0,4x_2 .$$

M(X)=3,2 олмасы шәртиндән алырыг:

$$0,6x_1+0,4x_2=3,2 \qquad (**)$$

$x_1$ вә $x_2$-ни әлагәләндирән бир тәнлик алынды. Икинчи тәнлији алмаг үчүн мә"лум дисперсијаны $x_1$ вә $x_2$ илә ифадә едәк.

| $X^2$ | $x_1^2$ | $x_2^2$ |
|---|---|---|
| P | 0,6 | 0,4 |

$M(X^2)$-ны тапаг:

$$M(X^2) = 0,6 \cdot x_1^2 + 0,4 \cdot x_2^2$$

Дисперсијаны тапаг:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 0,6 \cdot x_1^2 + 0,4 \cdot x_2^2 - (3,2)^2 = 0,96$$

D(X)=2,16 олдуғуну нәзәрә алсаг, елементар чевирмәләрдән сонра аларыг:

$$0,6 \cdot x_1^2 + 0,4 \cdot x_2^2 = 12,4 \qquad (***)$$

(**) вә (***) тәнликләрини бирләшдирсәк, ашағыдакы тәнликләр системини аларыг:

$$\begin{cases} 0{,}6 \cdot x_1 + 0{,}4 \cdot x_2 = 3{,}2 \\ 0{,}6 \cdot x_1^2 + 0{,}4 \cdot x_2^2 = 12{,}4 \end{cases}$$

Бу системи һәлл едиб ики һәлл алырыг:

$$x_1 = 2 \; ; \quad x_2 = 5 \quad \text{вә} \quad x_1 = \frac{14}{3} \; ; \quad x_2 = 1{,}4$$

$x_2 > x_1$ шәртинә көрә мәсәләни биринчи һәлл өдәјир:

$$x_1 = 2 \; ; \quad x_2 = 5 \qquad (****)$$

(****)-и (*)-да јеринә јазсаг, ахтарылан пајланма ганунуну аларыг:

| X | 2 | 5 |
|---|---|---|
| P | 0,6 | 0,4 |

Мәсәлә 15. 10 зәр атылмышдыр. Бүтүн үзләрдә дүшә билән халларын чәминин сајынын дисперсијасыны тапын.

Һәлли. Бүтүн үзләрдә дүшә билән халларын чәмини X дискрет тәсадүфи кәмијјәти илә, i-чи зәрдә дүшән халларын сајыны $X_i(i=1,2,...,10)$ илә ишарә едәк. Онда

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$$

Ајдындыр ки, бүтүн $X_i$ кәмијјәтләри ејни пајланмаја, демәли, ејни әдәди характеристикалара вә хүсуси һалда, ејни дисперсијалара маликдир, јә"ни

$$D(X_1) = D(X_2) = \cdots = D(X_{10}) \qquad (*)$$

Бахылан тәсадүфи кәмијјәтләр асылы олмадығына көрә, онларын чәминин дисперсијасы ајры-ајры топлананларын дисперсијалары чәминә бәрабәрдир:

$$D(X) = D(X_1 + X_2 + \cdots X_{10}) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_{10})$$

(*)-а әсасән алырыг:

$$D(X) = 10 \cdot D(X_1) \qquad (**)$$

Беләликлә, $X_1$ тәсадүфи кәмијјәтинин дисперсијасыны, јә"ни "биринчи" зәрдә дүшә билән халларын сајынын дисперсијасыны һесабламаг кифајәтдир. $X_1$-ин пајланма ганунуну јазаг:

| $X_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

$M(X_1)$-и тапаг:

$$M(X_1) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

$X_1^2$-нын пајланма ганунуну јазаг:

| $X_1^2$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

$M(X_1^2)$ вә $D(X_1)$-и тапаг:

$$M(X_1^2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

$$D(X_1) = M(X_1^2) - \left[M(X_1)\right]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12} \qquad (***)$$

(***)-у (*)-да јеринә јазсаг, ахтарылан дисперсијаны тапарыг:

$$D(X) = 10 \cdot \frac{35}{12} = \frac{175}{6}$$

Мәсәлә 16. Пуассон гануна әсасән пајланмыш дискрет тәсадүфи кәмијјәтин дисперсијасыны тапын:

| X | 0 | 1 | 2 | ... | k | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P | $e^{-\lambda}$ | $\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$ | $\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$ | ... | $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ | ... |

Һәлли. Ашағыдакы дүстурдан истифадә едәк:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

$M(X)=\lambda$ олдугуна көрә

$$D(X) = M(X^2) - \lambda^2 \qquad (*)$$

$X^2$-нын $k^2$ гијмәтини алмасы еһтималынын, X-ин k гијмәтини алмасы еһтималына бәрабәр олдуғуну (бу X кәмијјәтинин мүмкүн гијмәтләринин мәнфи олмамасындан алыныр) нәзәрә алараг $X^2$ тәсадүфи кәмијјәтинин пајланма ганунуну јазаг:

| $X^2$ | $0^2$ | $1^2$ | $2^2$ | ... | $k^2$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P | $e^{-\lambda}$ | $\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$ | $\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$ | ... | $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ | ... |

$X^2$-нын ријази көзләмәсини тапаг:

$$M(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

k=0 оланда чәмин биринчи һәддинин сыфра бәрабәр олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$M(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{k(k-1)!}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!}=$$

$$=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}[(k-1)+1]\frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!}=\lambda\left[\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!}\right]$$

k-1=m гәбул етсәк:

$$M(X^2)=\lambda\left[\sum_{k=0}^{\infty} m\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}\right]$$

Нәзәрә алсаг ки,

$$\sum_{k=0}^{\infty} m\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}=\lambda$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1 \quad .$$

(**)-у (*)-да нәзәрә алсаг:

$$D(X)=(\lambda^2+\lambda)-\lambda^2=\lambda$$

аларыг.

Беләликлә, Пуассон пајланманын дисперсијасы λ параметринә бәрабәрдир.

Мәсәлә 17. Атәшләрин сајына мәһдудијјәт гојмадан биринчи дәфә һәдәфә дәјәнә гәдәр атәш ачылыр. Әкәр һәр дәфә һәдәфә дәјмә еһтималы ејни олуб р-јә бәрабәрдирсә, ачылан атәшләрин ријази көзләмәсини вә дисперсијасыны тапын.

Һәлли. Әввәлчә атәшин (n+1)-чи дәфәдә гуртардығынын еһтималыны тапаг (биринчи n атәш һәдәфә дәјмәјиб, (n+1)-чи атәш һәдәфә дәјиб). Асылы олмајан һадисәләрин һасилләринин еһтималы онларын еһтималлары һасилинә бәрабәр олдуғундан, ахтарылан еһтимал

$$\underbrace{qq\cdots q}_{n}p = q^n p\ ,$$

бурада q=1-p; n=1,2,...

Тутаг ки, X тәсадүфи кәмијјәти - ачылан атәшләрин сајыдыр. Онда

$$M(X) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n p = p\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n = pS(q)$$

бурада $S(q) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$ - јығылма радиусу 1 олан гүввәт сырасынын чәмидир. Буна көрә дә $|q| < 1$

$$\int_0^q S(q)dq = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^q (n+1)q^n dq = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{q^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}q^{n+1} = \frac{q}{1-q}$$

Бурадан

$$S(q) = \left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}$$

$$M(X) = p\cdot S(q) = p\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Аналожи олараг X тәсадүфи кәмијјәтинин дисперсијасыны тапырыг. О $\frac{q}{p^2}$-на бәрабәрдир.



Мәсәлә 18. Ики асылы олмајан тәсадүфи кәмијјәт верилмишдир:пулу 2 дәфә атдыгда "керб" үзүнүн дүшмәси сајы - X вә зәри атдыгда дүшән халларын сајы - Y. (X-Y) тәсадүфи кәмијјәтинин пајланма ганунуну, X, Y, (X-Y) тәсадүфи кәмијјәтләринин рijази көзләмәсини, дисперсијасыны тапмалы вә

$$M(X-Y)=M(X)-M(Y)\ ,$$

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)$$

бәрабәрликләрини јохламалы.

Һәлли. X тәсадүфи кәмијјәти

$$P_2(m) = C_2^m p^m q^{2-m} \qquad \text{(Бернулли дүстуру)},$$

бурада m=0,1,2 вә p=0,5 , еһтималы илә m гијмәтини алдығы үчүн бу тәсадүфи кәмијјәтин пајланма чәдвәли ашағыдакы кимидир:

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P(X) | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

Бурадан

$$M(X) = 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} = 1$$

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M(X-1)^2 =$$

$$= (0-1)^2\cdot\frac{1}{4} + (1-1)^2\cdot\frac{1}{2} + (2-1)^2\cdot\frac{1}{4} = 0{,}5$$

Y тәсадүфи кәмијјәтинин пајланма чәдвәли ашағыдакы кимидир:

| Y | 0 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P(Y) | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Онда

$$M(Y) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 3{,}5$$

$$D(Y) = (1-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (2-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (3-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} +$$

$$+ (4-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (5-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (6-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} = 2{,}917\,.$$

(X-Y)-ин пајланмасыны алмаг үчүн мүхтәлиф мүмкүн $X=X_i$, $Y=y_i$, бу һалларын еһтималлары

$$P(X=x_i, Y=y_i) = P(X=x)P(Y=y_i)$$

һалларынын вә (X-Y)-ин гијмәтини верән чәдвәли тәртиб едәк.

| Мүхтәлиф мүмкүн олан һаллар | $X=x_i$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $Y=y_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Бу һалларын еһтималлары | $P(X=x_i, Y=y_i)$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ |
| X-Y гијмәти | $X_i-Y_i$ | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | -6 |

| | | |
|---|---|---|
| Мүхтәлиф мүмкүн олан һаллар | $X = x_i$ | 1 1 1 1 1 1 |
| | $Y = yi$ | 1 2 3 4 5 6 |
| Бу һалларын еһтималлары | $P(X = x_i, Y = yi)$ | $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{12}$ |
| X-Y гијмәти | $X_i - Y_i$ | 0 -1 -2 -3 -4 -5 |

| | | |
|---|---|---|
| Мүхтәлиф мүмкүн олан һаллар | $X = x_i$ | 2 2 2 2 2 2 |
| | $Y = y_i$ | 1 2 3 4 5 6 |
| Бу һалларын еһтималлары | $P(X = x_i, Y = y_i)$ | $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{24}$. |
| X-Y гијмәти | $X_i - Y_i$ | 1 0 -1 -2 -3 -4 |

Бурадан алынып ки,

$$M(X-Y)=-2,5 \ ,$$

јә"ни

$$M(X-Y)=M(X)-M(Y) \ .$$

$$D(X-Y)=3,417 \ ,$$

јә"ни

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y) \ .$$

Мәсәлә 19. X тәсадүфи кәмијјәти пајланма функсијасы илә верилмишдир:

$$F(x)=\begin{cases}0\ , & x\le -1\\ 3(x+1)\ , & -1<x\le \frac{1}{2}\\ 1\ , & x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

Сынаг нәтичәсиндә X кәмиҗҗәтинин $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ интервалында гиҗмәт алмасы еһтималыны тапмалы.

Һәлли. X кәмиҗҗәтинин (а,в) интервалында гиҗмәт алмасы еһтималы, һәмин интервалда паҗланма функсиҗасынын артымына бәрабәрдир:

$$P(a<X<в)=F(в)-F(a)\ .$$

$a=0,\ \ в=\frac{1}{2}$ гиҗмәтләрини җеринә җазсаг аларыг:

$$P\left(0<X<\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=\left[3(x+1)\right]_{x=1/2}-\left[3(x+1)\right]_{x=0}=$$

$$=\frac{9}{2}-3=1{,}5$$

Мәсәлә 20. X тәсадүфи кәмиҗҗәти паҗланма функсиҗасы илә верилмишдир:

$$F(x)=\begin{cases}0\ , & x\le 3\\ \frac{5x}{16}-1\ , & 3<x\le 5\\ 1\ , & x>5\end{cases}$$

Сынаг нәтичәсиндә X-ин а) 0,5-дән аз; б) дөрдән аз; в) үчдән аз олмајан; г) алтыдан аз олмајан гијмәт алмасы еһтималыны тапын.

Һәлли. а) $X \le 3$ олдугундан F(X)=0 олур, она көрә дә F(0,5)=0, jә"ни $P(X < 0{,}5) = 0$ .

б) $P(X < 4) = F(4) = \left[\frac{5x}{16} - 1\right]_{x=4} = 0{,}25$

в) $X \ge 4$ вә $X < 4$ һадисәләри гаршылыглыдыр, она көрә дә

$$P(X \ge 4) + P(X < 4) = 1$$

Бурада

$$P(X < 4) = 0{,}25$$

(бах б.(б)) олдуғуну нәзәрә алсаг, аларыг:

$$P(X \ge 4) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

г) гаршылыглы һадисәләрин еһтималлары чәми ваһидә бәрабәрдир, она көрә

$$P(X \ge 6) + P(X < 6) = 1$$

Бурада, X>5 олдугда, F(X)=1 олмасы шәртиндән истифадә етсәк, аларыг:

$$P(X \ge 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - F(6) = 1 - 1 = 0$$

Мәсәлә 21. X дискрет тәсадүфи кәмиjјәти пајланма гануну илә верилмишдир:

| X | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|
| P | 0,4 | 0,1 | 0,5 |

F(X) пајланма функсијасыны тапын вә онун графикини чәкин.

Һәлли. 1°. Әкәр $X \le 4$, онда F(X)=0. Доғрудан да X кәмиїјәти 4-дән кичик гијмәтләри алмыр. Беләликлә, X=4 олдугда

$$F(X)=P(X<x)=0.$$

2°. Әкәр $4 < X \le 5$, онда F(X)=0,4. Доғрудан да X кәмијјәти 4 гијмәтини 0,4 еһтималы илә алыр.

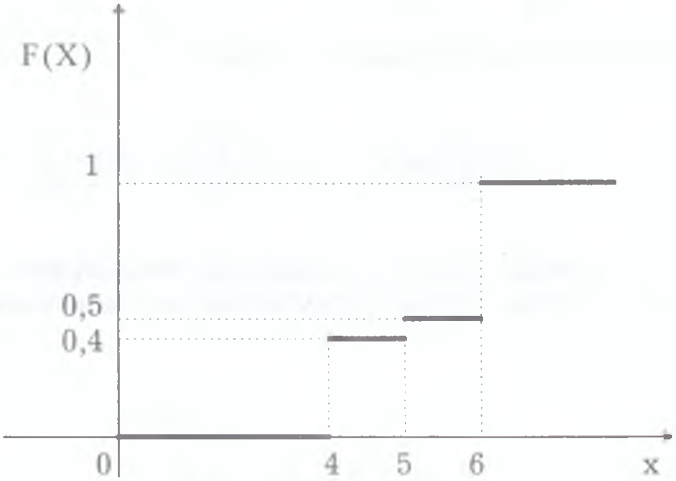
3°. Әкәр $5 < X \le 6$, онда F(X)=0,5. Доғрудан да X кәмијјәти 4 гијмәтини 0,4 еһтималы илә вә 5 гијмәтини 0,1 еһтималы ала биләр. Беләликлә, X бу гијмәтләрдән ихтијари бирини, фәрги јохдур һансыны (ујушмајан һадисәләр үчүн еһтималын топлама теореминә әсасән) 0,4+0,1=0,5 еһтималы илә ала биләр.

4°. Әкәр $X > 6$, онда F(X)=1. Доғрудан да $X \le 6$ һадисәси јә"гин һадисәдир вә онун еһтималы 1-ә бәрабәрдир.

Беләликлә, ахтарылан пајланма функсијасы ашағыдакы шәкилдә олар:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 4 \\ 0{,}4, & 4 < x \le 5 \\ 0{,}5, & 5 < x \le 6 \\ 1, & x > 6 \end{cases}$$

Бу функсијанын графики ашағыдакы кимидир:




Шәкил 18.

Мәсәлә 22. X кәсилмәз тәсадүфи кәмијјәти

$$f(x) = \frac{1}{4}\sin 2x$$

сыхлыг функсијасы илә $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ интервалында верилмишдир; бу интервал харичиндә f(x)=0. X-ин $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ интервалында гијмәт алмасы еһтималыны тапын.

Һәлли.

$$P(a<X<в) = \int_a^в f(x)dx$$

дүстурундан истифадә едәк. Шәртә көрә

$$a=\frac{\pi}{4},\ в=\frac{\pi}{3},\quad f(x)=\frac{1}{4}\sin 2x$$

Беләликлә, ахтарылан еһтимал

$$P\left(\frac{\pi}{4}<X<\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/3}\sin 2x dx=\frac{1}{16}$$

Мәсәлә 23. X кәсилмәз тәсадүфи кәмијјәти ашағыдакы сыхлыг фунусијасы илә верилмишдир:

$$f(x)=\begin{cases}0\ , & x\le 0\\ 3\cos 3x\ , & 0<x\le\frac{\pi}{6}\\ 0\ , & x>\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

F(x) пајланма функсијасыны тапын.

Һәлли. Ашағыдакы дүстурдан истифадә едәк:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$x\le 0$ оларса, онда f(x)=0, беләликлә,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dx=0$$

$0<x\le\frac{\pi}{6}$ оларса, онда

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{x} 3\cos 3x dx=\sin 3x$$

Әкәр $x > \frac{\pi}{6}$ оларса, онда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi/6} 3\cos 3x dx + \int_{\pi/6}^{x} 0dx = \sin 3x\Big|_0^{\pi/6} = 1 \ .$$

Беләликлә, ахтарылан пајланма функсијасы ашағыдакы шәкилдә олар:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad , & x \le 0 \\ \sin 3x \ , & 0 < x \le \frac{\pi}{6} \\ 0 \quad , & x > \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Мәсәлә 24. X кәсилмәз тәсадүфи кәмијјәтин сыхлыг функсијасы бүтүн OX оху үзрә

$$f(x) = \frac{A}{e^x + e^{-x}}$$

бәрабәрлији илә верилмишдир: Сабит A параметрини тапын.

Һәлли. f(x) сыхлыг функсијасы

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

шәртини өдәмәлидир. Тәләб едәк ки, верилән функсија үчүн бу шәрт өдәнилсин:

$$A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=1$$

$$A=\frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}} \qquad (*)$$

Әввәлчә гејри-мүәјјән интегралы тапаг.

$$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}=\operatorname{arctg} e^x$$

Сонра гејри-мәхсуси интегралы һесаблајаг.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{e^x+e^{-x}}+\lim_{b\to-\infty}\int_0^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg} e^x\Big|_a^0+\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg} e^x\Big|_0^b=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}[\operatorname{arctg} 1-\operatorname{arctg} e^a]+\lim_{b\to\infty}[\operatorname{arctg} e^b-\operatorname{arctg} 1]=\frac{\pi}{2}$$

Беләликлә,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\frac{\pi}{2} \qquad (**)$$

(**)-у (*)-да јеринә јазсаг, нәһајәт аларыг:

$$A=\frac{2}{\pi}\ .$$

Мәсәлә 25. X кәсилмәз тәсадүфи кәмијјәтин пајланма функсијасы верилмишдир:

$$F(x)=\begin{cases}0 \ , & x \le 0 \\ \cos x \ , & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 1 \ , & x > \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

f(x) сыхлыг функсиjасыны тапын.

Һәлли. Сыхлыг функсиjасы паjланма функсиjасынын биринчи төрәмәсинә бәрабәрдир:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 \ , & x \le 0 \\ -\sin x \ , & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \ , & x > \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Мәсәлә 26. X тәсадүфи кәмиjjәти (1,2) интервалында f(x)=3x сыхлыг функсиjасы илә верилмишдир; бу интервал харичиндә f(x)=0. X кәмиjjәтинин риjази көзләмәсини тапын.

Һәлли. Ашағыдакы дүстурдан истифадә едәк:

$$M(X)=\int_{a}^{в} x f(x)dx$$

a=1 ; в=2 ; f(x)=3x гиjмәтләрини jеринә jазсаг:

$$M(X)=3\int_{1}^{2} x\cdot x dx = 3\int_{1}^{2} x^2 dx = \frac{3}{3}x^3\Big|_1^2 = 8-1=7.$$

Мәсәлә 27. X тәсадүфи кәмиијәти (-3,3) интервалында $f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}$ сыхлыг функсијасы илә верилмишдир; бу интервал харичиндә f(x)=0. X кәмијјәтинин ријази көзләмәсини тапын.

Һәлли. Ашағыдакы дүстурдан истифадә едәк:

$$M(X)=\int_a^в xf(x)dx$$

a=-3 ; в=3 ; $f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}$ гијмәтләрини јеринә јазсаг:

$$M(X)=\int_{-3}^{3}\frac{xdx}{\pi\sqrt{9-x^2}}$$

Интегралалты функсија тәк вә интегралын сәрһәдләри координат башланғычына көрә симметрик олдуғу һалда, интеграл сыфра бәрабәр олар. Беләликлә, M(X)=0. X=0 дүз хәттинә нәзәрән әјринин симметрик олмасына нәзәр јетирсәк, бу нәтичәни билаваситә алмаг олар.

Мәсәлә 28.Ашағыдакы пајланма функсијасы илә верилмиш X тәсадүфи кәмијјәтин ријази көзләмәсини тапын:

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\le 0\\ \frac{x}{5} & , \quad 0<x\le 5\\ 1 & , \quad x>5\end{cases}$$

Һәлли. X-ин сыхлыг функсијасыны тапаг:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \quad , & x \le 0 \\ \dfrac{1}{5} \quad , & 0 < x \le 5 \\ 1 \quad , & x > 5 \end{cases}$$

Ахтарылан риjази көзләмәни тапаг:

$$M(X) = \int_0^5 xf(x)dx = \int_0^5 x \cdot \frac{1}{5}dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^5 = 2{,}5$$

Мәсәлә 29. Мүхтәлиф сәбәбләр үзүндән е"малатханаjа тә"мир үчүн дахил олан телевизорларын мүхтәлиф чатышмамазлыглары олур. Бу чатышмамазлыглары арадан көтүрмәк үчүн лазым олан вахт (тә"мир вахты) тәсадүфи T кәмиjjәтидир. Әкәр еһтималларын паjланма функсиjасы

$$F(t) = \begin{cases} 0 \;, & t \le 0 \\ 1 - e^{-\upsilon t}, & t > 0 \end{cases} \quad (\upsilon > 0)$$

(тә"мир вахтынын үстлү паjланма гануну) оларса, телевизорларын тә"мир вахтынын риjази көзләмәсини вә дисперсиjасыны тапмалы.

Һәлли. Риjази көзләмәнин вә дисперсиjанын дүстуруна еһтималларын паjланмасынын сыхлыг функсиjасы дахил олдуғу үчүн, әввәлчә f(t) сыхлыг функсиjасыны тапырыг:

$$f(t) = F'(t) = \begin{cases} 0 \;, & t \le 0 \\ (1 - e^{-\upsilon t})', & t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \;, & t \le 0 \\ \upsilon \cdot e^{-\upsilon t}, & t > 0 \end{cases} .$$

Онда телевизорларын орта тә"мир вахты:

$$MT = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)dt = \int_0^{+\infty} t\upsilon e^{-\upsilon t}dt = -\int_0^{+\infty} t de^{-\upsilon t} =$$

$$= -t\upsilon e^{-\upsilon t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\upsilon t}dt = -\frac{1}{\upsilon} e^{-\upsilon t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\upsilon}$$

Нәзәрә алсаг ки,

$$DT = MT^2 - (MT)^2 \ ,$$

$$MT^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_0^{+\infty} t^2 \upsilon e^{-\upsilon t}dt = -\int_0^{+\infty} t^2 de^{-\upsilon t} =$$

$$= -t^2 \upsilon e^{-\upsilon t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\upsilon t} 2tdt = 2\cdot\frac{1}{\upsilon}\int_0^{+\infty} t\upsilon e^{-\upsilon t}dt =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\upsilon}\cdot\frac{1}{\upsilon} = \frac{2}{\upsilon^2} \ .$$

Онда

$$DT = \frac{2}{\upsilon^2} - \frac{1}{\upsilon^2} = \frac{1}{\upsilon^2}$$

Мәсәлә 30. Һәр һансы бир материалын (мәсәлән, дашын) парчаланмасындан алынан һиссәчикләри, пајланма сыхлығы

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \le 0 \\ \dfrac{1}{\sigma(x)\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}} \ , & x > 0 \end{cases}$$



дүстуру илә тә"јин олунан логарифмик-нормал ганунла пајланмыш һесаб етмәк олар. Бу тәсадүфи кәмијјәтин ријази көзләмәсини тапын.

Һәлли. Мә"лум олан дүстура көрә:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Алынмыш интервалда дәјишәни әвәз едәк:

$t = \dfrac{(\ln x - a)}{\sigma}$ гәбул етсәк, онда

$\ln x = a + \sigma t$ , $\quad x = e^{a+\sigma t}$ , $dx = \sigma e^{a+\sigma t}dt$

$x = 0$ олдугда, $t = -\infty$ ,

$x = \infty$ олдугда $t = +\infty$ олар. Бурадан,

$$M(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma e^{a-\sigma t}dt = \frac{e^{a-\frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}} dt = e^{a-\frac{\sigma^2}{2}}$$

белә ки, $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}} dt = 1$ (Пуассон интегралы)

Мәсәлә 31. X тәсадүфи кәмијјәтинин пајланма сыхлығы ашағыдакы кимидир:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$y = x^2$ тәсадүфи кәмиjјәтинин пајланма сыхлығыны тапын.

Һәлли. Әввәлчә У тәсадүфи кәмиjјәтининин пајланма функсијасыны тапаг. О, мәнфи гиjмәтләр алмадығы үчүн $F(Y)=P(Y<y)$ $y \le 0$ үчүн сыфра бәрабәрдир. Тутаг ки, y>0. Онда

$$F(y) = P(Y < y) = P(X^2 < y) = P(|x| < \sqrt{y}) =$$

$$= P(-\sqrt{y} < x < \sqrt{y}) =$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

Беләликлә,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \dfrac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx, & y > 0 \end{cases}$$

Буна көрә дә ахтарылан сыхлыг функсијасы ашағыдакы кимидир:

$$\varphi(y) = F'(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \dfrac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & y > 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}} \cdot e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}, & y > 0 \end{cases}$$



Мәсәлә 32. Тутаг ки, X тәсадүфи кәмиjјәти

$$f(x) = |x|\, e^{-x^2}$$

пајланма сыхлығына маликдир. Верилмиш тәсадүфи кәмиjјәтин (0;1) интервалында гиjмәт алмасы еһтималы нәјә бәрабәрдир?

Һәлли. Ахтарылан еһтимал $P(0<X<1)$ пајланма сыхлығынын икинчи хассәсинин көмәји илә тапыла биләр:

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Бизим һал үчүн:

$$P(0 < x < 1) = \int_0^1 |x|\, e^{-x^2} dx = \int_0^1 x\, e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-1}) = \frac{1}{2}(1 - 0{,}3679) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}6321 = 0{,}31605 .$$

(бурада $t=-x^2$ әвәзләмәси апарылмышдыр)

Мәсәлә 33. Сыхлығы

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

олан нормал ганунла пајланмыш тәсадүфи кәмиjјәтин ријази көзләмәсини вә дисперсијасыны тапмалы.

Һәлли. Сыхлыг функсијасы f(x) олан кәсилмәз тәсадүфи кәмиjјәтин ријази көзләмәси ашағыдакы дүстурла тә"јин олунур:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \quad ,$$

Онда бизим һалда

$$M(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx \quad ,$$

Бу интегралда дәјишәни әвәз едәк.

$\frac{x-a}{\sigma} = t$ гәбул етсәк, онда $x = a + \sigma t$, $dx = \sigma dt$ . Онда

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(a+\sigma t)\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt +$$

$$+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}d = a$$

белә ки, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}$ (Пуассон интеғралы)

$\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0$ (интегралалты функсија тәк олдуғу үчүн)

Дисперсија

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Дәјишәни әвәз едәк:

$$x - a = \sigma t \,,$$

$$D(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dx = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-t)de^{-\frac{t^2}{2}} =$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}(-t)e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sigma^2$$

Беләликлә,

$M(X)=a\ ,\ \ D(X)=\sigma^2\,.$

Мәсәлә 34. Тутаг ки, X тәсадүфи кәмијјәти

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

сыхлыглы нормал ганунла пајланмышдыр. Верилмиш тәсадүфи кәмијјәтин мүмкүн мејлини тапмаг тәләб олунур, јә"ни елә сабит M тапмаг лазымдыр ки,

$$P(|X-a|<M)=50\%$$

өдәнсин:

Һәлли. Пајланма сыхлыгынын икинчи хассәсинә ујғун олараг:

$$P(|X-a|<M)=P(a-M<X<a+M)=$$

$$=\int_{a-M}^{a+M}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Алынмыш интегралда дәјишәни әвәз едәк:

$$z=\frac{x-a}{\sigma}\ ,\ \ dx=\sigma dz\,.$$

$x=a-M$ олдугда $z=\frac{-M}{\sigma}$ ,

$x=a+M$ олдугда $z=\frac{M}{\sigma}$ ,

Она көрә дә

$$P(|X-a|<M)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{M}{\sigma}}^{\frac{M}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{M}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\Phi\left(\frac{M}{\sigma}\right)$$

Бурада $\Phi\left(\frac{M}{\sigma}\right)$, $\frac{M}{\sigma}$ нөгтәсиндә Лаплас функсијасынын гијмәтидир. Мәсәләнин шәртинә көрә $\Phi\left(\frac{M}{\sigma}\right)=0{,}5$.

Ҹәдвәлә көрә (əлавә 2) . Ф(t)=0,5 олан t аргументинин гијмәтини тапырыг: t=0,675.

Ајдындыр ки, $\frac{M}{\sigma}=0{,}675$ ; $M=0{,}675\sigma$ .

### 3. Сәрбәст ишләмәк үчүн мәсәләләр

1. Ашағыдакы пајланма гануну илә верилмиш X дискрет тәсадүфи кәмијјәтинин ријази көзләмәсини тапын.

| X | -5 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|
| P | 0,2 | 0,3 | 0,5 |

Ҹаваб: 0,9

2. Ашағыдакы пајланма ганунy илә верилмиш X дискрет тәсадүфи кәмијјәтинин ријази көзләмәсини тапын.

| X | 0,21 | 0,54 | 0,70 |
|---|---|---|---|
| P | 0,2 | 0,2 | 0,6 |

Ҹаваб: 0,57

3. X дискрет тәсадүфи кәмијјәти үч мүмкүн гијмәт алыр: $p_1=0{,}2$ еһтималы илә $x_1=0{,}21$ ; $p_2=0{,}6$ еһтималы илә $x_2=0{,}7$ ; $p_3$ еһтималы илә $x_3$. Әкәр $M(X)=0{,}67$ оларса, $x_3$ вә $p_3$-ү тапын.

Ҹаваб: $x_3=0{,}54$ ; $p_3=0{,}2$

4. X дискрет тәсадүфи кәмијјәтинин ала биләҹәји гијмәтләр $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=-5$, һәмчинин бу кәмијјәтин өзүнүн вә квадратынын ријази көзләмәси верилмишдир:

$$M(X)=0{,}9 \;;\; M(X^2)=9{,}7$$

$x_1$, $x_2$, $x_3$ гијмәтләринә ујғун $p_1$, $p_2$, $p_3$ еһтималларыны тапын.

Ҹаваб: $p_1=0{,}5$; $p_2=0{,}3$; $p_3=0{,}2$ .

5. X дискрет тәсадүфи кәмијјәтинин ријази көзләмәси вә дисперсијасы ујғун олараг 2 вә 10-дур. (2X+5) кәмијјәтинин ријази көзләмәсини вә дисперсијасыны тапын.

Ҹаваб: $M(2X+5)=9$ ; $D(2X+5)=40$ .

6. Ашағыдакы пајланма гануну илә верилмиш X тәсадүфи кәмијјәтинин ријази көзләмәсини, дисперсијасыны вә орта квадратик мејлини тапын.

| X | 3 | 5 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

Ҹаваб: M(X)=5

$D(X)=4$

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=2$

7. Һәр һансы сынагда сајғача чатан α-һиссәҹикләринин сајы X - тәсадүфи кәмијјәти ашағыдакы пајланма ганунy илә верилмишдир:

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P | 0,021 | 0,081 | 0,156 | 0,202 | 0,195 | 0,151 |

| X | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| P | 0,097 | 0,054 | 0,026 | 0,011 | 0,007 |

а) сајғача чатан һиссәчикләринин сајынын ријази көзләмәсини вә дисперсијасыны;

б) сајғача чатан һиссәчикләринин сајынын дөрддән аз олмамасы еһтималыны тапмалы.

Чаваб: а) $M(X)=3,868$
$M(X^2)=18,802$
$D(X) = 3,841$
б) $P(X \geq 4) = 0,541$

8. Бир дәфә сынаг апардыгда мүвәффәгијјәтин баш вермәси әдәдинин дисперсијасынын $\frac{1}{4}$-и ашмадығыны исбат един.

Көстәриш: $D(X)=p(1-p)$, $p=\frac{1}{2}$ - max нөгтәси, буна көрә дә $D(X) \leq \frac{1}{4}$.

9. 4 патрону олан овчу һәдәфә икинчи дәфә дәјәнә гәдәр (вә ја патрону гуртарана гәдәр) атәш ачыр. Истифадә олунан патронларын ријази көзләмәсини вә дисперсијасыны тапын. Һәр бир атәшин һәдәфә дәјмә еһтималы 0,25-сә, бу тәсадүфи кәмијјәтин пајланма функсијасынын графикини гурун.

Чаваб: $M(X)=2,734$
$D(X)=1,618$

10. Фәһлә 4 дәзкаһа хидмәт едир. Һәр бир дәзкаһын 1 саат әрзиндә фәһләнин диггәтини тәләб етмәмәси еһтималы беләдир: I дәзкаһ үчүн 0,9; II дәзкаһ үчүн 0,8; III дәзкаһ үчүн 0,75 вә IV дәзкаһ үчүн 0,75. Бир саат әрзиндә фәһләнин диггәтини тәләб етмәјән дәзкаһларын сајынын ријази көзләмәсини вә дисперсијасыны тапын.

Чаваб: $M(X)=3,15$
$D(X)=0,65$

11. Сехдә бүтүн мә"мулатын 5%-и зајдыр. Ихтијари көтүрүлмүш 6 деталдан зај оланларын сајынын пајланма чәдвәлини гурун. Бу тәсадүфи кәмијјәтин ријази көзләмәсини вә дисперсијасыны тапын.

Чаваб: $M(X)=0,3$
$D(X)=0,285$

12. Пулу 7 дәфә атырлар. "Герб" үзүнүн дүшмәси һалларынын сајынын ријази көзләмәсини вә дисперсијасыны тапын.

Чаваб: $M(X)=3,5$
$D(X)=1,75$

13. Зәри 12 дәфә атырлар. Ваһидин дүшмәмәси һалларынын сајынын ријази көзләмәсини вә дисперсијасыны тапын.

Чаваб: $M(X)=10$
$D(X)=1,67$

14. Бир нәфәрин 8 ачары вар вә гапыны ачмаг истәјир. Намә"лум сәбәбдән о, бу ачарлары тәсадүфи сечир. Ашағыдакы шәрт дахилиндә сынаг сајларынын ријази көзләмәсини вә дисперсијасыны тапын:

1) сынагдан кечирилмиш ачар сонракы сечмәләрдә иштирак едир;

2) иштирак етмир (Фәрз олунур ки, гапыја јалныз бир ачар дүшүр).

Чаваб: 1) $M(X)=4,5$ ; $D(X)=5,25$
2) $M(X)=8$ ; $D(X)=42$

15. Асылы олмаjан сынаглар А һадисәсинин баш вермәси үчүн S дәфә тәкрар олунур. Әкәр А һадисәсинин ихтиjари сынагда баш вермәсинин еһтималы еjни олуб р-jә бәрабәрдирсә, апарылан сынагларын риjази көзләмәси нәjә бәрабәр олар?

Ҹаваб: M(X)=S/p

16. Тутаг ки, һәр бириндә А һадисәсинин баш вермәси еһтималы еjни олуб 0,1-ә бәрабәр олан асылы олмаjан сынаглар I дәфә А һадисәсинин баш вермәсинә гәдәр давам етдирилир. Апарылмыш сынагларын саjынын риjази көзләмәсини тапын.

Ҹаваб: M(X)=10

17. Ики дәфә һәдәфә дәjәнә гәдәр атәш ачылыр. Әкәр бир дәфә атәш ачылдыгда һәдәфә дәjмә еһтималы 0,2 оларса, ачылан атәшләрин саjынын риjази көзләмәсини тапын.

Ҹаваб: M(X)=10

18. Гејри-стандарт мә"мулатын һазырланмасы еһтималы сабитдир вә 0,1-ә бәрабәрдир. Һазырланан мә"мулатын кеjфиjjәтини jохламаг үчүн техники нәзарәт шө"бәси һәр партиjада 4-дән артыг детал көтүрмүр. Гејри-стандарт мә"мулат олдугда бүтүн партиjа сахланылыр. Һәр партиjадан техники нәзарәт шө"бәсиндә jохланылан мә"мулатларын саjынын паjланма ганунуну тәртиб етмәли. Бу тәсадүфи кәмиjjәтин риjази көзләмәсини вә дисперсиjасыны тапын.

Ҹаваб: M(X)=3
D(X)=439 .

19. Автомашынларын һәрәкәт jолунда 4 светофор вар. Онларын һәр бири автомашынларын сонракы һәрәкәтини 0,5 еһтималы илә jа гадаған едир, jа да ичазә верир. Паjланманын полигонуну



гурун; биринчи даjаначаға гәдәр автомашынын кечдиjи светофорларын саjынын паjланма функсиjасыны тапмалы; бу функсиjанын графикини гурмалы. Бу тәсадүфи кәмиjjәтин риjази көзләмәсини вә дисперсиjасыны тапын.

Ҹаваб: M(X)=0,938
D(X)=1,43 .

20. Мүәссисә А вә В мәһсулларындан а вә в манат кәлир көтүрүр, С мәһсулундан исә с манат иткиjә мә"руз галыр. А,В,С. мәһсулларынын мигдары уjғун олараг беләдир: p,g,r. Бу мүәссисә үчүн кәлирин риjази көзләмәсини тапын.

Ҹаваб: M(X)=a p + в g - cr

21. N саjда адамлар ганыны jохлатдырмаг истәjир. Ганын jохланмасы ики үсулла ола биләр: 1) һәр бир адамын ганы аjрылыгда jохланылыр - бу һал үчүн N анализ тәләб олунур; . 2) n адамын ганы гарышдырылыр вә алынан гарышыг jохланылыр. Әкәр бу анализин нәтичәси мәнфидирсә, онда n адам үчүн биринин анализи кифаjәтдир. Әкәр бу анализин нәтичәси мүсбәтдирсә, онда һәр бир адамын ганыны аjрылыгда jохламаг лазымдыр вә бүтүнлүкдә n адам үчүн n+1 анализ лазымдыр. Фәрз едилир ки, анализин мүсбәт нәтичәсинин еһтималы p олуб, һәр бир адам үчүн еjнидир вә анализин нәтичәси нәзәри еһтимал нөгтеjи нәзәриндән асылы деjилләр, Адамларын гарышыг ганынын анализинин мүсбәт олмасы еһтималы нәjә бәрабәрдир? 2-чи үсулда анализләрин саjынын риjази көзләмәси нәjә бәрабәрдир?

Ҹаваб: $1-q^n$ ; $N(1-q^n+\frac{1}{n})$
бурада $q=1-p$.

22. X кәсилмәз тәсадүфи кәмиј̇јәтин пајланма функсијасы верилмишдир:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \le 0 \\ \cos 3x \ , & 0 < x \le \dfrac{\pi}{3} \\ 1 \ , & x > \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

f(x) сыхлыг функсијасыны тапын.

$$\text{Ҹаваб:} \ f(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \le 0 \\ -3\sin 3x \ , & 0 < x \le \dfrac{\pi}{3} \\ 0 \ , & x > \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

23. X кәсилмәз тәсадүфи кәмиј̇јәтин пајланма функсијасы верилмишдир:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \le 2 \\ 3x^2 + 5x - 3 \ , & 0 < x \le 4 \\ 1 \ , & x > 4 \end{cases}$$

f(x) пајланма функсијасыны тапын.

$$\text{Ҹаваб:} \ f(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \le 2 \\ 6x + 5 \ , & 2 < x \le 4 \\ 0 \ , & x > 4 \end{cases}$$

24. X кәсилмәз тәсадүфи кәмијјәтин сыхлыг функсијасы верилмишдир:

$$f(x)=\begin{cases}0 \quad , & x\le 0\\ \sqrt{2}\cos x \ , & 0<x\le\dfrac{\pi}{4}\\ 0 \quad , & x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

F(x) пајланма функсијасыны тапын.

$$\text{Чаваб: } F(x)=\begin{cases}0 \quad , & x\le 0\\ \sqrt{2}\sin x \ , & 0<x\le\dfrac{\pi}{4}\\ 1 \quad , & x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

25. Ријази көзләмәси 1-ә, дисперсијасы исә 4-ә бәрабәр олан нормал тәсадүфи кәмијјәтин 0-дан кичик (-5)-дән бөјүк гијмәтләр алмасы еһтималыны тапын.

Чаваб: $P(-5<X<0)=0{,}307$.

Көстәриш: Габагчадан көстәрмәк лазымдыр ки, әкәр X $MX=a$ , $DX=\sigma$ илә нормал ганунла пајланмышдырса: онда

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)\right].$$

26. Ријази көзләмәси 3-ә, дисперсијасы исә 1-ә бәрабәр олан нормал тәсадүфи кәмијјәтин (0,5;3,5) интервалында гијмәтләр алмасы еһтималы нәјә бәрабәрдир.

Чаваб: $P(0,5 < X < 3,5) = 0,685$.

27. Ријази көзләмәси а-ја, дисперсијасы $\sigma^2$-на бәрабәр олан нормал тәсадүфи кәмијјәтин пајланма функсијасыны

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Лаплас функсијасы илә ифадә един.

Чаваб. $0,5\left[1 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)\right]$.

28. X тәсадүфи кәмијјәти (0;3) интервалында $f(x) = \frac{1}{3}x$ сыхлыг функсијасы илә верилмишдир; бу интервал харичиндә $f(x) = 0$. X кәмијјәтинин ријази көзләмәсини тапын.

Чаваб: M(X)=3.

29. X тәсадүфи кәмијјәти $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ сыхлыг функсијасы илә верилмишдир; бу интервал харичиндә $f(x) = 0$; $y = \varphi(x) = x^2$ функсијасынын ријази көзләмәсини тапын (у-ин сыхлыг функсијасыны тапмадан)



Чаваб: $\frac{\pi^2 - 4}{16}$.

30. X тәсадүфи кәмијјәти $(2;3)$ интервалында $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 5x - \frac{23}{2}$ сыхлыг функсијасы илә верилмишдир; бу интервал харичиндә $f(x) = 0$. X кәмијјәтинин ријази көзләмәсини тапын.

Чаваб: M(X)=-2,5 .

31. X кәсилмәз тәсадүфи кәмијјәтинин дифференсиал функсијасы верилмишдир:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 6x + 5, & 0 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

X тәсадүфи кәмијјәтинин дисперсијасыны тапмалы.

Чаваб: $D(X) = 0$ .

32. Ашағыдакы интеграл функсијаса илә верилмиш X тәсадүфи кәмијјәтинин дисперсијасыны тапмалы:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ \frac{x}{5} + \frac{1}{4}, & -2 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Чаваб: $D(X) = \frac{16}{15}$.

IV фәсил

# Бөјүк әдәдләр гануну.

## 1. Нәзәри мә"лумат.

1. Мә"лумдур ки, баш вермәси тәсадүфдән асылы олан һәр бир һадисә бир-бириндән асылы олмајан күлли мигдарда тәсадүфи факторларын тә"сиринә мә"руз галыр. Бу факторларын һәр бири ајрылыгда һадисәнин кедишинә чох аз тә"сир едир. Һәр бир факторун һадисәнин кедишинә тә"сири мүәјјән тәсадүфи кәмијјәтлә $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ характеризә олунур вә онларын һамысыны ајрылыгда излә-мәк, тәкликдә тә"сирини өјрәнмәк гејри-мүмкүндүр. Она көрә дә белә тәсадүфи кәмијјәтләрин биркә тә"сирини, јә"ни $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ чәминин тә"сирини өјрәнмәк мәсәләси бөјүк әһәмијјәт кәсб едир.

Мүәјән едилмишдир ки, һадисәнин кедишинә тә"сир едән $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ кәмијјәтләри гаршылыглы асылы дејилсә, онларын сајы n истәнилән гәдәр бөјүкдүрсә вә чәмин тә"сиринә нисбәтән һәр бир кәмијјәтин тәкликдә тә"сири нәзәрә алынмајачаг дәрәчәдә кичикдирсә, онда $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ чәминин пајланма гануну нормал пајланма ганунуна чох јахын олур. Бу ганунаујғунлуг еһтимал нәзәријјәсинин әсас фактларындан бири олуб, бөјүк әдәдләр гануну адланыр.

Бөјүк әдәдләр гануну мүхтәлиф теоремләр шәклиндә ифадә олунур. Бу теоремләр И.Л.Чебышев, А.А.Марков, А.М.Љапунов, Ј.Бернулли, А.Н.Колмогоров вә башгаларынын ады илә бағлыдыр. Һәтта А.М.Љапунов теореми мәркәзи лимит теореми адланыр.

2. <u>А.М.Марков бәрабәрсизлији</u>. Әкәр X тәсадүфи кәмијјәти мәнфи олмајан гијмәтләр алырса



$(X = x \geq 0)$ вә MX=a исә, онда истәнилән $\tau > 0$ үчүн

$$P(X > \tau) \leq \frac{a}{\tau} = \frac{MX}{\tau}, \qquad (1)$$

$$P(X \leq \tau) \geq 1 - \frac{a}{\tau} = 1 - \frac{MX}{\tau}. \qquad (2)$$

Хүсуси һалда $\tau = t^2 \cdot MX = a \cdot t^2$ олса,

$$P(X > at^2) \leq \frac{a}{at^2} = \frac{1}{t^2}, \qquad (3)$$

$$P(X \leq at^2) > 1 - \frac{1}{t^2}. \qquad (4)$$

Бунлардан (1) бәрабәрсизлијини исбат етмәк кифајәтдир, галанлары (1)-дән алыныр. (1) исә белә исбат олуна биләр: X-ин сыхлыг функсијасы f(x) олсун. Онда

$$P(X > \tau) = \int_{\tau}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\tau} \cdot \int_{\tau}^{\infty} \tau \cdot f(x)dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{\tau} \cdot \int_{\tau}^{\infty} x \cdot f(x)dx \leq \frac{1}{\tau} \cdot \int_{0}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \frac{MX}{\tau}.$$

3. <u>Чебышев бәрабәрсизлији</u>. X тәсадүфи кәмијјәтинин сонлу $DX = \sigma_x^2$ дисперсијасы варса, MX=a исә, онда истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн

$$P\{|X - a| \leq \varepsilon\} > 1 - \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}; \qquad (5)$$

$$P\{|X - a| > \varepsilon\} \leq \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2}. \qquad (6)$$

Бунун исбаты үчүн исә Марков бәрабәрсизлијини $У = (x-a)^2$ кәмијјәтинә тәтбиг етмәк кифајәтдир.

4. Бернулли теореми. n - асылы олмаjан сынаглар сериjасында A һадисәсинин баш вермә тезлиjи m, бу сынагларын һамысында $P(A)=p$ $(0<p<1)$ исә, онда истәнилән $\varepsilon>0$ үчүн

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{|X-a|\leq\varepsilon\right\}=1 \qquad (7)$$

5. Чебышев теореми. Чүт-чүт асылы олмаjан тәсадүфи кәмиjjәтләрин $\{\xi_к\}$ ардычыллығы үчүн $\{D\xi_к\}$ ардычыллығы мәһдуддурса $(D\xi_к\leq c)$, онда истәнилән $\varepsilon>0$ үчүн

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}(\xi_1+\xi_2+...+\xi_n)-\frac{1}{n}(a_1+a_2+...+a_n)\right|\leq\varepsilon\right\}=1,$$

$$a_к=M\xi_к. \qquad (8)$$

Буну belә дә jазмаг олар:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a_k)\right|\leq\varepsilon\right\}=1. \qquad (9)$$

Хүсуси һалда $M\xi_к=a$ $(к=1,2,...)$ оларса, онда (Хинчин теореми)

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\xi_k-a\right|\leq\varepsilon\right\}=1. \qquad (10)$$

6. Марков теореми. $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ тәсадүфи кәмиjjәтләри үчүн

$$D\eta_n=D\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\to 0, (n\to\infty) \qquad (11)$$

шәрти өдәнилирсә, онда истәнилән $\varepsilon>0$ үчүн

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{|\eta_n-M\eta_n|\leq\varepsilon\right\}=1, \qquad (12)$$

бурада

$$\eta_n = \frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n) \ ;$$

$$M\eta_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n) \ ;$$

$$M\xi_n = a_k \ (k = 1,2,\dots,n) \ .$$

7. Истәнилән $\varepsilon>0$ үчүн

$$A = \left\{ \left| \frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n) - \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n) \right| < \varepsilon \quad (n > N) \right\}$$

һадисәси јәгин һадисәјә истәнилән гәдәр јахын олдугда ($P(A)$ әдәди 1-ә истәнилән гәдәр јахын олдугда) дејирләр ки, $\{\xi_к\}$ ардычыллыгына бөјүк әдәдләр гануну тәтбиг олуна биләр.

Чебышев, Марков, Бернулли вә с. теоремләрдә бахылан $\{\xi_к\}$ тәсадүфи кәмијјәтләр ардычыллығына бөјүк әдәдләр гануну тәтбиг олуна билмәси үчүн кафи шәртләр көстәрилмишдир.

А.М.Љјапунов теореми. Гаршылыглы асылы олмајан тәсадүфи кәмијјәтләри $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ ардычыллығы үчүн елә $\delta>0$ әдәди сечмәк мүмкүндүрсә ки, $n \to \infty$ - да

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} M|\xi_k - a_k)|^{2+\delta} \to 0 \qquad ( B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k ) \qquad (13)$$

шәрти өдәнилсин, онда $n \to \infty$ - да x-ә нәзәрән мүнтәзәм олараг

$$\lim_{n\to\infty} P \left\{ \frac{1}{B_n} \cdot \sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k) < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{t^2}{2})dt \qquad (14)$$

2. Нүмунәви мәсәләләр һәлли.

Мәсәлә 1. Верилмиш мәнтәгәдә јерин сәтһиндә күләјин сүр"әтинин ријази көзләмәси 8 м/сан-јә бәрабәрдир. Бу мәнтәгәдә күләјин сүр"әтинин: а) 30 м/сан-дән бөјүк олмасы; б) 32 м/сан-ни ашмамасы еһтималыны гијмәтләндирмәли.

Һәлли. а) τ=30 м/сан вә MX=8 м/сан олдугда

$$P(X>\tau)\leq\frac{MX}{\tau}$$

Марков бәрабәрсизлијини тәтбиг етсәк, аларыг:

$$P(X>30)\leq\frac{8}{30}\approx0{,}267\ ,$$

јә"ни ахтарылан һадисәнин еһтималы 0,267-дән бөјүк дејил.

б) τ=32 м/сан вә MX=8 м/сан олдугда Марков бәрабәрсизлијиндән

$$P(X\leq32)\geq1-\frac{8}{32}=0{,}75$$

алыныр, јә"ни ахтарылан һадисәнин еһтималы 0,75-дән аз дејил.

Мәсәлә 2. Мүһәррикин орта ишләмә мүддәти 4 илдир. Һәмин мүһәррикин 20 илдән чох ишләмәси еһтималыны ашағыдан гијмәтләндирмәли.

Һәлли. Ишләмә мүддәтини X - тәсадүфи кәмијјәти илә ишарә едәк. Мәсәләнин шәртинә нәзәрән MX=a, P(X<20) еһтималыны ашағыдан гијмәтләндирмәк тәләб олунур. Бу еһтимала Марков бәрабәрсизлијинин сағ һиссәсиндә τ=20 кими бахмаг олар. Онда

$$P(X<20)>1-\frac{MX}{\tau}=1-\frac{4}{20}=0{,}8\ .$$

Мәсәлә 3. Әманәт кассасында олан бүтүн әманәтләрин мигдары 100000000 манатдыр. Тәсадүфи



көтүрүлмүш әманәтин 500000 манат олмасы еһтималы 0,8-дир. Һәмин әманәт кассасында әманәтчиләрин сајы һаггында нә демәк олар?

Һәлли. Тутаг ки, X тәсадүфи кәмијјәти тәсадүфи көтүрүлмүш әманәт вә n - бүтүн әманәтчиләри сајыдыр. Онда мәсәләнин шәртинә әсасән

$$MX=\frac{100000000}{n}\ .$$

Белә ки,

$$P(X<500000)\geq\frac{MX}{500000}\ ,$$

онда

$$0{,}8\geq1-\frac{100000000}{n\cdot500000}\ .$$

Бурадан

$$\frac{100000000}{n\cdot500000}\geq0{,}2\ ,\quad 200\geq n\cdot0{,}2\ .$$

Јә"ни $n\leq1000$ олмалыдыр.

Мәсәлә 4. Һәр бир 1000 сынагда һадисәнин баш вермәси еһтималы 0,3-ә бәрабәрдир. Чебышев бәрабәрсизлијиндән истифадә етмәклә бу һадисәнин баш вермә сајынын ријази көзләмәсиндән мејлинин 30-дан чох олмамасы еһтималыны гијмәтләндирмәли.

Һәлли. n=1000 сынагда һадисәнин баш вермә сајы биномиал ганунла пајланмыш тәсадүфи кәмијјәтдир. Она көрә дә онун ријази көзләмәсини вә дисперсијасыны

$$MX=np$$
$$DX=npq$$

дүстурлары илә тапырыг:

$$MX=1000\cdot0{,}3=300\ ,\ DX=1000\cdot0{,}3\ 0{,}7=210\ ,$$

$$a=300\ ,\ \varepsilon=30 \text{ вә } DX=210$$

олдугда

$$P(|X-a|<\varepsilon)\le\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

Чебышев бәрәбәрсизлијиндән исә ашағыдакы нәтиҹәни алырыг:

$$P(|X-300|>30)\le\frac{210}{30^2}\approx 0{,}233$$

Беләликлә, ахтарылан һадисәнин еһтималы 0,233-дән чох дејил.

Мәсәлә 5. Оғланын доғулма еһтималы 0,5-ә бәрабәрдир. Чебышев бәрәбәрсизлијинин көмәји илә 1200 јени доғулан ушагларын арасында оғланларын сајынын 550-дән 650-јә гәдәр олмасы еһтималыны гијмәтләндирмәли.

Һәлли. 1200 дүнјаја кәлмиш ушагларын арасында оғланларын сајы биномиал ганунла пајланмыш тәсадүфи кәмијјәтдир. Онун ријази көзләмәси вә дисперсијасы ујғун олараг:

$$MX=1200\cdot 0{,}5=600\ ;$$

$$DX=1200\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5=300$$

олар. Белә ки, тәсадүфи кәмијјәтин мүмкүн гијмәтләринин сәрһәдләри 550 вә 650 ријази көзләмәјә көрә симметрикдир (бири ондан 50 дәнә чох, о бириси исә 50 дәнә аздыр). Онда $550\le X\le 650$ бәрәбәрсизлијини она еквивалент олан $|X-600|\le 50$ бәрабәрсизлији илә әвәз етмәк олар. Она көрә дә

$$P(|X-a|\le\varepsilon)\ge 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

Чебышев бәрәбәрсизлијинә көрә $\varepsilon=50$ олдугда



$$P(550\le X\le 650)=P(|X-600|\le 50)\ge 1-\frac{300}{50^2}=0{,}88\ .$$

алырыг. Демәли, ахтарылан һадисәнин еһтималы 0,88-дән аз дејил.

Мәсәлә 6. Һәр сынагда A һадисәсинин башвермә еһтималы 0,2-јә бәрабәрдир. Чебышев бәрабәрсизлијиндән истифадә едәрәк 10000 сынагда A һадисәсинин тезлијинин онун еһтималындан мејлинин мүтләг гијмәтчә 0,01-и ашмамасы еһтималыны гијмәтләндирмәли.

Һәлли. n сынагда A һадисәсинин тезлији тәсадүфи кәмијјәтдир. Онун ријази көзләмәси A һадисәсинин баш вермәси еһтималы олан p-јә, дисперсијасы исә $\frac{pq}{n}$- ә бәрабәрдир. Она көрә дә Чебышев бәрабәрсизлијини тәтбиг етмәклә

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}\qquad (*)$$

алырыг.

Шәртә көрә $\varepsilon=0{,}01$ , $p=0{,}2$ , $q=0{,}8$ вә $n=10000$ олдугда ахтарылан һадисәнин еһтималы

$$P\left(\left|\frac{x}{10000}-0{,}2\right|\le 0{,}01\right)\ge 1-\frac{0{,}000016}{(0{,}01)^2}=0{,}84$$

алыныр, јә"ни һәмин еһтимал 0,84-дән аз дејил.

Мәсәлә 7. Һәр сынагда һадисәнин баш вермәси еһтималы 0,3-ә бәрабәрдир. Чебышев бәрабәрсизлијини тәтбиг етмәклә, һадисәнин тезлијинин, онун еһтималындан мејлинин мүтләг гијмәтчә 0,99-дан чох олмамасы үчүн лазым олан сынагларын сајыны тапмалы.

Һәлли. Әввәлки мәсәләнин һәллиндә алынмыш (*) бәрабәрсизлијинә ујғун олараг, әкәр p,q вә ε-нын верилмиш гијмәтләриндә n еlә сечилмәлидир ки,

$$1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}\geq P$$

бәрабәрсизлији өдәнилсин. Бу да сынагларын ахтарылан ән кичик n сајыны тә"јин едир:
p=0,3 , q=0,7 , ε=0,01 вә P=0,99 олдуғда

$$1-\frac{0{,}3\cdot 0{,}7}{n\cdot(0{,}01)^2}\geq 0{,}99 \quad \text{вә ја} \quad 0{,}01\geq\frac{0{,}21}{n\cdot(0{,}01)^2}$$

алыныр. Бурадан n≥210000, јә"ни сынагларын ән кичик сајы 210000-ә бәрабәрдир.

Мәсәлә 8. Верилмиш јүксәкликдә күләјин сүр"әти 25 км/саат, орта квадратик мејли 4,5 км/саатдыр. Бу јүксәкликдә 0,9-дан аз олмајан еһтималла күләјин һансы сүр"әтини көзләмәк олар?

Һәлли.

$$P(|X-a|\leq\varepsilon)\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

бәрабәрсизлијиндән belә чыхыр ки, верилмиш DX үчүн ε еlә сечилмәлидир ки,

$$1-\frac{DX}{\varepsilon^2}=0{,}9$$

олсун, онда мәсәләнин шәрти өдәниләр. Бурадан ε-ну тә"јин едәк:

$$1-\frac{(4{,}5)^2}{\varepsilon^2}=0{,}9 \quad ;$$

$$\varepsilon\approx 14{,}2$$

вә ја



$$|X-25|\leq 14{,}2 \text{ км/саат, јә"ни}$$

$$10{,}8 \text{ км/саат}\leq X\leq 39{,}2 \text{ км/саат} .$$

Мәсәлә 9. Електрик стансијасы 18000 лампасы олан електрик шәбәкәсини тә"мин едир вә һәр гыш ахшамында һәр бир лампанын гошулмасы еһтималы 0,9-а бәрабәрдир. Шәбәкәјә гошулан лампаларын сајынын өз ријази көзләмәсиндән фәргинин мүтләг гијмәтчә 200-дән чох олмасы еһтималы нәјә бәрабәрдир?

Һәлли. Лампаларын гошулмасы сајы тәсадүфи кәмијјәт олуб, биномиал ганун үзрә пајланыр вә бу тәсадүфи кәмијјәтин ријази көзләмәси бүтүн асылы олмајан сынаглар сајынын (n=18000) һәр бир ајры-ајры һаллар үчүн еһтималлары (p=0,9) һасилинә бәрабәрдир, јә"ни

$$MX=np=18000\cdot 0{,}9=16200.$$

X-ин дисерсијасы

$$DX=npq=18000\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1=1620$$

(q=1-p) дүстуру илә тапылыр .Чебышев бәрабәрсизлијинә көрә:

$$P(|X-MX|\leq 200)\geq 1-\frac{DX}{200^2}=1-\frac{1620}{40000}=1-0{,}045=0{,}955 \ .$$

Бу еһтималын дәгиг гијмәтини Муавр-Лапласын интеграл теореминдән истифадә етмәклә тапырыг:

$$P(|X-MX|\leq 200)=P(|X-1620|\leq 200)=$$

$$=P(16000\leq X\leq 16400)\approx$$

$$\approx\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{16400-16200}{\sqrt{1620}}\right)-\Phi\left(\frac{16000-16200}{\sqrt{1620}}\right)\right]=$$

$$= \Phi\left(\frac{200}{\sqrt{1620}}\right) = \Phi(4,97) = 1$$

Бурада Ф(t) - Лаплас функсиjасыдыр.

Мәсәлә 10. Гурғу бир-бириндән асылы олмадан ишләjән 10 елементдән ибарәтдир. Т мүддәтиндә елементин сырадан чыхмасы еһтималы 0,05-ә бәрабәрдир. Чебышев бәрабәрсизлиjиндән истифадә едәрәк Т мүддәтиндә сырадан чыхан елементләрин саjы илә онларын орта саjынын (риjази көзләмәсинин) фәргинин мүтләг гиjмәтчә: а) икидән аз олмасы, б) икидән аз олмамасы еһтималыны гиjмәтләндирин.

Һәлли. а) Т мүддәтиндә сырадан чыхан елементләрин саjыны көстәрән дискрет тәсадүфи кәмиjjәти X илә ишарә едәк. Онда

$$MX = np = 10 \cdot 0,05 = 0,5 \ ;$$

$$DX = npq = 10 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 0,475 \ .$$

Чебышев бәрәбәрсизлиjиндән истифадә едәк:

$$P(|X - MX| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

Бурада $MX=0,5$ ; $DX=0,475$ вә $\varepsilon=2$ олдуғуну нәзәрә алсаг

$$P(|X - 0,5| < 2) \ge 1 - \frac{0,475}{4} = 0,88 \ .$$

б) $|X - 0,5| < 2$ вә $|X - 0,5| \ge 2$ һадисәләри гаршылыглы һадисәләрдир, она көрә дә онларын еһтималлары чәми ваһидә бәрабәрдир. Беләликлә,

$$P(|X - 0,5| \ge 2) \le 1 - 0,88 = 0,12 \ .$$

Мәсәлә 11. 1800 һа саһәли фермер саһәсинин орта мәһсулдарлығыны тә"јин етмәк үчүн һәр һектардан сечмә илә 1 $м^2$ көтүрүлүр. Саһәнин һәр һектарынын дисперсијасы 6-ны ашмадығы мә"лумдур. Мәһсулдарлығын орта сечмәсинин бүтүн саһәдә мәһсулдарлыгдан фәргинин 0,25 сентнердән чох олмамасы еһтималыны гијмәтләндирмәли.

Һәлли. $\varepsilon=0{,}25$ , $c=6$ вә $n=1800$ олдуғундан

$$P > 1-\frac{c}{n\varepsilon^2}=1-\frac{6}{1800\cdot 0{,}0625}=1-0{,}053=0{,}947 \quad .$$

Беләликлә, $P>0{,}947$.

Мәсәлә 12. X тәсадүфи кәмијјәтинин пајланма гануну ашағыдакы чәдвәлдә верилир:

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p(x) | 0,05 | 0,10 | 0,25 | 0,30 | 0,20 | 0,10 |

$|X-MX|<2$ олмасы еһтималы нәјә бәрабәрдир? Бу еһтималы Чебышев бәрабәрсизлији васитәси илә гијмәтләндирмәли.

Һәлли. Әввәлчә X тәсадүфи кәмијјәтинин ријази көзләмәсини вә дисперсијаны тапаг:

$$M(X)=1\cdot 0{,}05+2\cdot 0{,}10+3\cdot 0{,}25+4\cdot 0{,}30+5\cdot 0{,}20+6\cdot 0{,}10=3{,}80$$

$$M(X^2)=1^2\cdot 0{,}05+2^2\cdot 0{,}10+3^2\cdot 0{,}25+4^2\cdot 0{,}30+5^2\cdot 0{,}20+ +6^2\cdot 0{,}10=16{,}10$$

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=16{,}10-14{,}44=1{,}66 \quad .$$

$P(|X-M(X)|<2)$ еһтималыны тапмаг үчүн X тәсадүфи кәмијјәтинин $|X-M(X)|<2$ бәрабәрсизлијини өдәјән гијмәтләрини билмәк лазымдыр:

$$|X-3,8|<2 \quad ;$$

$$-2 < X-3,8 < 2 \quad ;$$

$$1,8 < X < 5,8 \quad .$$

Бу бәрабәрсизлији јалныз X-ин 2,3,4 вә 5 гијмәтләри өдәјир. Бурадан

$$P(|X-3,8|<2)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$$
$$=0,10+0,25+0,30+0,20=0,85$$

Чебышев бәрабәрсизлијиндән истифадә едәрәк истәнилән еһтималы ашағыдан гијмәтләндирә биләрик:

$$P(|X-M(X)|\le\varepsilon)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Онда

$$P(|X-3,8)|<2)\ge 1-\frac{1,66}{4}=0,585 \quad .$$

Мәсәлә 13. Үмуми техники нәзарәт (ҮТН) шө"бәсинин мә"луматына көрә пластмасс лөвһәләрин штампланмасы заманы зај мәһсул 3% тәшкил едир. 1000 лөвһәдән ибарәт лөвһәләр партијасына бахыш заманы зај мәһсулун мүәјјән едилмиш фаизиндән мејлинин 1%-дән аз олмасынын еһтималыны тапын.

Һәлли. p=0,03 вә n=1000 олмагла $\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon$ олмасы һадисәсинин еһтималыны тапмаг тәләб олунур. Бернулли теореминә көрә

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{p\cdot q}{\varepsilon^2\cdot n}$$

$$\frac{p\cdot q}{\varepsilon^2\cdot n}=\frac{0,03\cdot 0,97}{(0,01)^2\cdot 1000}=\frac{0,0291}{0,1}=0,291 \quad ;$$

Демәли,

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)>1-0{,}291=0{,}709 \ .$$

Мәсәлә 14. Пирсонун һесаблаіычы машында моделләшдирмәіә даир метал пулун атылмасы илә бағлы експериментиндә дүзкүн дүзәлдиш метал пулун 24000 дәфә атылмасы заманы 12012 дәфә керб үзү дүшмүшдүр.

а) Бу нәтичәнин алынмасынын априор еһтималы нә гәдәрдир?

б) Експериментин тәкрар олунмасы заманы белә вә јахуд нисби тезлијин бир експеримент үчүн мүфәффәгијјәт газанмаг еһтималындан даһа чох мејл етмәси нә дәрәчәдә еһтималлыдыр.

Һәлли. Тутаг ки, дүзкүн метал пулун n-дәфә атылмасы заманы керб үзүнүн дүшмәсинин сајы $x_n$-дир. Мәсәләнин шәртинә көрә n=24000, $p=q=\frac{1}{2}$ вә $npq=6000>1$ . Она көрә дә Муавр-Лаплас теоремини тәтбиг етмәк олар.

а) Муавр-Лапласын Локал теореминә көрә

$$P(x_n=12012)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot6000}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{12}{\sqrt{6000}}\right)^2\right)\approx5{,}088\cdot10^{-3}$$

б) n експериментдә $\frac{1}{n}\cdot x_n$ тәсадүфи кәмијјәти нисби тезлик мә"насыны верир вә мә"лум олдуғу кими

$$D\left(\frac{1}{n}\cdot x_n\right)=\frac{p\cdot q}{n} \ .$$

Пирсон тәчрүбәсиндә исә бу нисби тезлијин $p=\frac{1}{2}$ еһтималындан мејли

$$\frac{12012}{24000}-\frac{1}{2}=0{,}0005 \ .$$

Онда Муавр-Лапласын интеграл теореминә көрә алырыг:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}x_n-\frac{1}{2}\right|\geq 0{,}0005\right)=1-P\left(\left|\frac{1}{n}x_n-\frac{1}{2}\right|\prec 0{,}0005\right)\approx$$

$$\approx 2-2\Phi\left(\frac{0{,}0005}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right)=2-2\Phi(0{,}1549)\approx 0{,}8668 \ .$$

Мәсәлә 15. 3000 асылы олмајан тәсадүфи кәмијјәтдән һәр биринин дисперсијасы 6-ны ашмыр. Бу тәсадүфи кәмијјәтләрин әдәди ортасынын, онларын ријази көзләмәләринин әдәди ортасындан мејлинин 0,3-ү ашмамасы еһтималыны гијмәтләндирмәли.

Һәлли. $\varepsilon=0{,}3$ ; $c=6$ вә $n=3000$ гијмәтләрини Чебышевин

$$P=\left(\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|\leq\varepsilon\right)\geq 1-\frac{c}{n\varepsilon^2}$$

бәрабәрсизлијиндә јеринә јазсаг, аларыг:

$$P=\left(\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{3000}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{3000}\right|\leq 0{,}3\right)\geq$$

$$\geq 1-\frac{6}{3000\cdot 0{,}3^2}\approx 0{,}978$$

Демәли, ахтарылан еһтимал 0,978-дән аз дејил.



Мәсәлә 16. $X_k$ тәсадүфи кәмијјәти $\frac{1}{2k^2}$, $1-\frac{1}{k^2}$ вә $\frac{1}{2k^2}$ еһтималлары илә ујғун олараг -к, 0 вә к гијмәтләрини алырса, $X_1,X_2,\ldots,X_k$ асылы олмајан тәсадүфи кәмијјәтләр ардычыллычына бөјүк әдәдләр ганунуну тәтбиг етмәк оларму?

Һәлли. Чебышевин верилмиш тәсадүфи кәмијјәтләрин дисперсијаларынын ејни бир С сабит илә мәһдудијјәти шәртләринин өдәнилмәсини јохлајаг.

$$M(X_k)=-k\cdot\frac{1}{2k^2}+0\cdot(1-\frac{1}{k^2})+k\cdot\frac{1}{2k^2}=0$$

олдуғундан

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$$

дүстуруна әсасән алырыг ки,

$$M(X_k)=M(X_k^2)=(-k)^2\cdot\frac{1}{2k^2}+0^2\cdot(1-\frac{1}{k^2})+k^2\cdot\frac{1}{2k^2}=1$$

јә"ни бүтүн тәсадүфи кәмијјәтләрин дисперсијалары ејнидир, она көрә дә мәһдуддурлар (С-нин јеринә 1 көтүрмәк олар). Чебышев теореминин ғалан шәртләри дә өдәнилир. Буна көрә дә бу тәсадүфи кәмијјәтләр ардычыллығына бөјүк әдәдләр ганунуну тәтбиг етмәк олар. Бахылан һалда бу о демәкдир ки, верилмиш тәсадүфи кәмијјәтләрин кифајәт гәдәр бөјүк гијмәтләринин әдәди ортасы чох кичикдир (Тәсадүфи кәмијјәтләрин ријази көзләмәси 0 олдуғу үчүн ријази көзләмәнин әдәди ортасы да 0-дыр.).

Мәсәлә 17. $X_n$ тәсадүфи кәмијјәти бәрабәр еһтималла -n вә n гијмәтләри алырса, асылы олмајан тәсадүфи кәмијјәтләрин $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ ардычыллығына бөјүк әдәдләр ганунуну тәтбиг етмәк оларму?

Һәлли. Верилмиш тәсадүфи кәмијјәтләр үчүн онларын дисперсијаларынын С сабити илә мәһдудијјәти һаггында Чебышев теореминин шәрти өдәнилмир:

$$M(X_n) = 0,$$

$$D(X_n) = M(X_n^2) = (-n)^2 \cdot \frac{1}{2} + n^2 \cdot \frac{1}{2} = n^2 .$$

Теоремин шәрти кафи олдуғундан, верилмиш тәсадүфи кәмијјәтләр ардычыллығына бөјүк әдәдләр ганунунун тәтбиг олунмасыны демәк олмаз. Бу тәсадүфи кәмијјәтләрин ријази көзләмәси 0 олдуғу үчүн ријази көзләмәләрин әдәди ортасы да 0 олур. Буна көрә дә бөјүк әдәдләр ганунуну тәтбиг етсәк, онда

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \right| < \varepsilon$$

бәрабәрсизлијинин өдәнилмәси еһтималы n-ин артмасы илә 1-ә јахынлашарды. Көстәрәк ки, мәсәләнин шәрти дахилиндә бу ола билмәз. Тутаг ки,

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n$$

онда

$$S_{n-1} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} .$$

$S'_n$ чәминин бүтүн гијмәтләри ики група дүшүр:

$$S'_n = S_{n-1} + n$$

вә

$$S''_n = S_{n-1} - n .$$

(Тәсадүфи кәмијјәтин мүмкүн олан бүтүн гијмәтләринә $x_n$-ин мүмкүн гијмәтләри әлавә олунур.) Белә ки,

$$S''_n = S_{n-1} - n = S'_n - n - n = S'_n - 2n$$

онда

$$\frac{S''_n}{n} = \frac{S'_n}{n} - 2$$

Мүмкүн гәдәр кичик ε сечилмишсә (һәр һалда 1-дән кичик) вә $\left|\frac{S'_n}{n}\right| < \varepsilon$, онда ајдындыр ки, еjни вахтда

$$\left|\frac{S''_n}{n}\right| = \left|\frac{S'_n}{n} - 2\right|$$

кәмиjјәти дә ε-дан кичик ола билмәз. Буна көрә дә $S'_n$ вә $S''_n$ чәмләринин уjғун гиjмәтләринин бәрабәр еһтималлылығына көрә

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| < \varepsilon\right)$$

еһтималлары ихтиjари n үчүн 0,5-дән бөjүк ола билмәз, jә"ни 1-ә јахынлашмыр.

Беләликлә, мәсәләнин шәртинә лазым олан мәнфи чаваб верилди.

Мәсәлә 18. Електрик лампасынын ишләмәсинин орта давамлылығыны тә"jин етмәк үчүн еjни саjлы електрик лампасы олан 200 гутунун һәр бириндән тәсадүфи олараг бир лампа көтүрүлүр. Сечилмиш 200 лампанын ишләмәсинин орта давамлылығынын гутуларда олан бүтүн лампаларын давамлылығындан мүтләг гиjмәтчә 5 саатдан аз олмамасынын еһтималыны, һәр гутудакы лампаларын ишләмә давамлылығынын орта квадратик мејли 7 саатдан аз олдуғуну биләрәк ашағыдан гиjмәтләндирмәли.

Һәлли. Тутаг ки, i-чи гутудан көтүрүлмүш лампанын давамлылығы $X_i$-дир. Мәсәләнин шәртинә көрә

$$D(X_i) < 7^2 = 49 .$$

Сечилән лампаларын орта давамлылығы

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{200}}{200}$$

бүтүн гутуларда олан лампаларын орта давамлылығы

$$\frac{MX_1 + MX_2 + \cdots + MX_{200}}{200}$$

олар. Онда, әслиндә

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{200}}{200} - \frac{MX_1 + MX_2 + \cdots + MX_{200}}{200}\right| < 5\right)$$

еһтималыны гијмәтләндирмәк лазымдыр.

$X_1, X_2, \cdots, X_{200}$ асылы олмајан тәсадүфи кәмијјәтләр олдуғундан, бу еһтимал ашағыдан (5) Чебышев бәрабәрсизлијинин сағ тәрәфи васитәсилә гијмәтләндирилир, бурада $C=49$, $\varepsilon \le 5$, $n=200$. Беләликлә, ахтарылан еһтимал

$$P \ge 1 - \frac{49}{200 \cdot 25} = 1 - \frac{49}{5000} = 1 - 0{,}0098 = 0{,}9902 \quad .$$

Мәсәлә 19. Асылы олмајан $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ тәсадүфи кәмијјәтләри ардычыллығы ашағыдакы пајланма гануну илә верилдикдә бу ардычыллыға Чебышев теореминин тәтбиг олунмасынын мүмкүнлүјүнү арашдырмалы:

| X | -5n | 0 | 5n |
|---|---|---|---|
| P(X) | $\frac{1}{3n^2}$ | $1-\frac{2}{3n^2}$ | $\frac{1}{3n^2}$ |

Һәлли. Ихтијари n үчүн $D(X_n)<C$ бәрабәрсизлијини өдәјән сабит C варса, тәсадүфи $X_n$ кәмијјәтләри ардычыллығына Чебышев теоремини тәтбиг етмәк олар. Буну јохлајаг.



$$M(X) = -5n \cdot \frac{1}{3n^2} + 0 \cdot (1 - \frac{2}{3n^2}) + 5n \cdot \frac{1}{3n^2} = 0 \quad ,$$

$$M(X^2) = (-5n)^2 \cdot \frac{1}{3n^2} + 0^2 \cdot (1 - \frac{2}{3n^2}) + (5n)^2 \cdot \frac{1}{3n^2} =$$

$$= \frac{25}{3} + \frac{25}{3} = \frac{50}{3} \quad ,$$

$$D(X) = \frac{50}{3}$$

Беләликлә, елә сабит C вар (бурада $C=\frac{50}{3}$ көтүрмәк олар) вә $\{X_n\}$ ардычыллығына Чебышев теоремини тәтбиг етмәк олар.

Мәсәлә 20. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ асылы олмајан тәсадүфи кәмијјәтләр ардычыллығынын

| X | $-n\alpha$ | 0 | $n\alpha$ |
|---|---|---|---|
| P(X) | $\frac{1}{2^n}$ | $1-\frac{1}{2^{n-1}}$ | $\frac{1}{2^n}$ |

пајланма гануну верилмишдир. Верилмиш ардычыллыға Чебышев теоремини тәтбиг етмәк олармы?

Һәлли. $X_n$ тәсадүфи кәмијјәтләрин асылы олмамаларындан онларын чүт-чүт асылы олмамалары чыхыр, јә"ни Чебышев теореминин биринчи тәләби өдәнилир. Асанлыгла тапмаг олар ки, $M(X_n)=0$, јә"ни ријази көзләмәләрин сонлу олмасы тәләби өдәнилир. Дисперсијаларын мүнтәзәм мәһдудлуғу тәләбинин өдәнилдијини јохламаг галыр.

$$D(X_n) = M(X_n^2) - [M(X_n)]^2$$

дүстурундан истифадә етсәк вә $M(X_n)=0$ олдуғуну нәзәрә алсаг, көрәрик ки (чевирмәләрин ичрасы охучулара тапшырылыр),

$$D(X_n)=\frac{n^2}{2^{n-1}}\cdot\alpha^2 \quad .$$

Мүвәггәти олараг фәрз едәк ки, n кәсилмәз дәјишир (n-и x илә ишарә едәк). $\varphi(x)=\frac{x^2}{2^{x-1}}$ функсијасыны екстремума көрә тәдгиг едәк. Бу функсијанын биринчи тәртиб төрәмәсини сыфра бәрабәр едиб бөһран нөгтәләрини тапарыг: $x_1=0$ вә $x_2=\frac{2}{\ln 2}$.

Биринчи нөгтә мараглы олмадығындан атаг ( n сыфра бәрабәр гијмәт алмыр). Асанлыгла көрмәк олар ки, $x_2=\frac{2}{\ln 2}$ нөгтәсиндә $\varphi(x)$ функсијасы максимума маликдир. $\frac{2}{\ln 2}\approx 2{,}9$ вә n там әдәд олдуғуну нәзәрә алараг, $D(X_n)=\frac{n^2}{2^{n-1}}\cdot\alpha^2$ дисперсијасынын 2,9-а јахын олан (солдан вә сағдан) там әдәд үчүн n=2 вә n=3 әдәдләриүчүн һесаблајаг.

n=2 олдугда дисперсија $D(X_2)=2\cdot\alpha^2$, n=3 олдугда дисперсија $D(X_3)=\frac{9}{4}\alpha^2$ олур. Ајдындыр ки,

$$\frac{9}{4}\alpha^2>2\alpha^2$$

Беләликлә, дисперсијанын мүмкүн олан ән бөјүк гијмәти $\frac{9}{4}\alpha^2$, јә"ни $X_n$ тәсадүфи кәмијјәтләринин

дисперсијалары мүнтәзәм олараг $\frac{9}{4}\alpha^2$ әдәди илә мәһдуддур.

Демәли, Чебышев теореминин бүтүн тәләбләри өдәнилир, јә"ни бахылан ардычыллыға бу теореми тәтбиг етмәк олар.

3. Сәрбәст ишләмәк үчүн мәсәләләр.

1. Јашајыш мәнтәгәсиндә суја күндәлик орта тәләбат 100000 литрдирсә, јахын күнләрдә тәләбатын 1000000 литри ашмасы еһтималыны гијмәтләндирин.

Чаваб: $P \leq 0,1$

2. Мүәјјән бир әразијә дүшән јағынтынын иллик орта мигдары 400 мм-дир. Һәмин әразидә ил әрзиндә јағынтынын 1200 мм-дән чох дүшмәси еһтималыны гијмәтләндирин.

Чаваб: $P \leq 0,333$ .

3. Һәр һансы мәнтәгәдә јерин сәтһи үзәриндә күләјин орта сүр"әти 16 км/саат-дыр. Бу мәнтәгәдә күләјин сүр"әтинин 80 км/сааты ашмамасы еһтималыны гијмәтләндирин.

Чаваб: $P \geq 0,8$ .

4. Күлләнин һәдәфин ортасындан аралы дәјмәсинин ријази көзләмәси 6 см-дир. Радиусу 15 см олан даирәви һәдәфә күлләнин дәјмәси еһтималыны гијмәтләндирин.

Чаваб: $P \geq 0,6$ .

5. Бир атәш ачдыгда һәдәфи дәф етмәк еһтималыны 0,4 гәбул едәрәк, 120 атәш ачдыгда һәдәфә 80-дан чох дәјмәмәси еһтималыны гијмәтләндирмәли. Лапласын интеграл теореминдән истифадә едәрәк бу еһтималын тәгриби гијмәтини тапмалы.

Чаваб: $P \geq 0,4$ .

6. Тәсадүфи кәмиjjәтин

| X | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P | 0,1 | 0,3 | 0,25 | 0,15 | 0,15 | 0,15 |

пајланма гануну верилмишдир. X тәсадүфи кәмиjjәтинин 11-дән кичик гиjмәт алмасы еһтималы нә гәдәрдир? Еһтималы Марков бәрабәрсизлиjиндән истифадә едәрәк гиjмәтләндирмәли.

Чаваб: 0,85 ; $P \geq 0{,}327$ .

7. Jашаjыш массивиндә бир күндә ишләнән суjун орта гиjмәти 50000 литрдир. Бу массивдә бир күндә ишләнән суjун 120000 литрдән чох олмамасы еһтималыны гиjмәтләндирмәли.

Чаваб: $P \geq 0{,}583$ .

8. X вә У асылы олмаjан вә мәнфи олмаjан тәсадүфи кәмиjjәтләрдир. M(X)=5 вә M(У)=4 оларса, ашағыдакы бәрабәрсизликләрин еһтималыны ашағыдан гиjмәтләндирмәли:

а) $X+Y<40$

б) $X \cdot Y<200$

Чаваб: а) $P \geq 0{,}775$ ; б) $P \geq 0{,}9$ .

9. Пајланма сыхлығы

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

олан X нормал пајланмаjа малик тәсадүфи кәмиjjәтдир. $P(|X| < n)$ тапмалы вә Марков бәрабәрсизлиjиндән истифадә едәрәк бу кәмиjjәти гиjмәтләндирмәли.

Чаваб: $\Phi(n)$ ; $P \geq 1 - \frac{2}{n\sqrt{2\pi}}$ .

10.Јашајыш мәнтәгәсиндә сујун күндәлик сәрф едилмәсинин орта квадратик мејли 10000 литр олан тәсадүфи кәмијјәтдир. Бу мәнтәгәдә күн әрзиндә сујун ишләдилмәсинин ријази көзләмәдән 25000 литр (мүтләг гијмәтчә) мејл етмәси еһтималыны гијмәтләндирмәли.

Чаваб: $P \geq 0{,}16$ .

11. Ихтијари тәсадүфи кәмијјәтин ријази көзләмәдән мејлинин мүтләг гијмәтчә квадратик мејлин үч мислини ашмамасы еһтималыны гијмәтләндирмәли.

Чаваб: $P \geq 0{,}889$

12.Јашајыш мәнтәгәсиндә електрик енержисинин күндәлик тәләбатынын ријази көзләмәси 2000 квт. саат, дисперсијасы 20000 олан тәсадүфи кәмијјәтдир. Бу јашајыш мәнтәгәсиндә јахын күнләрдә електрик енержисини сәрфинин 1500 квт.саатдан 2500 квт. саата гәдәр олмасы еһтималыны гијмәтләндирмәли.

Чаваб: $P(1500 \leq X \leq 2500) = P\left(\left|X - 2000\right| \leq 500\right) \geq 0{,}92$ .

13. Бир сынаг нәтичәсиндә ихтијари A һадисәсинин баш вермәси еһтималы 0,3-ә бәрабәрдир. Тәләб олунур: а) α) 9000 сынаг; β) 75000 сынаг апарылара, һадисәнин тезлијинин онун еһтималындан (мүтләг гијмәтчә) 0,01-дән чох мејл етмәмәси еһтималыны Чебышев бәрабәрсизлијиндән истифадә едәрәк гијмәтләндирмәли; б) Лапласын интеграл теоремини тәтбиг етмәклә һәмин һадисәләрин еһтималларыны тапмалы.

Чаваб:а) (α)$\geq$0,767 ; (β)$\geq$0,972 ;

б) (α) $\Phi(2{,}07)=0{,}9616$ ; (β) $\Phi(5{,}98)=1$ .

14. Автоматын пул гәбуледичисинин бир әдәд пул атдыгда дүзкүн ишләмәси еһтималы 0,95-ә бәрабәрдирсә, Чебышев бәрабәрсизлијиндән исти-

фадә едәрәк: а) 2500 дәфә пул атдыгда автоматын дүзкүн ишләмәси һалларынын тезлијинин (мүтләг гијмәтчә) еһтималдан 0,02-дән чох мејл етмәси еһтималыны; б) 2000 дәфә пул атдыгда автоматын дүзкүн ишләмәси һалларынын сајынын 1860 илә 1940 арасында олмасы еһтималыны гијмәтләндирмәли.

Чаваб: а) $P \geq 0,9525$ ; б) $P \geq 0,941$ .

15. Бир сынаг нәтичәсиндә һадисәнин баш вермәси еһтималы 1/3-ә бәрабәрдир: а) Чебышев бәрабәрсизлијиндән; б) Лапласын интеграл теореминдән истифадә етмәклә 12100 сынаг апарылдыгда һадисәнин тезлијинин онун еһтималындан 0,99-дан аз олмајан еһтималла көзләнилә билән ән бөјүк мејлини тапын. Алынмыш нәтичәләри мүгајисә един.

Чаваб: а) 0,043 ; б) $\approx 0,011$ .

16. Јарарлы деталларын тезлијинин јохланылан деталын јарарлы олмасы еһтималы 0,95-дән мејлинин мүтләг гијмәтчә 0,01-и ашмамасы еһтималынын 0,98-дән кичик олмасы үчүн нечә деталы јохламаг лазымдыр?

Чаваб: $n \geq 23750$ .

17. Јохламадан кечән саатларын стандарта ујғун кедиш дәгиглијинә малик олмасы еһтималы 0,97-јә бәра*бәрдир. 1000 әдәд саатдан нормаја ујғун кедиш дәгигликли саатларын сајынын (мүтләг гијмәтчә) еһтималындан 0,02-дән чох мејл етмәмәси еһтималыны гијмәтләндирин.

Чаваб: $P \geq 0,92725$ .

18. Атәш ардычыл олараг үч силаһдан ачылыр. Бир атәшдә һәдәфә дәјмә еһтималы һәр бир силаһ үчүн ујғун олараг 0,8; 0,6 вә 0,4-ә бәрабәрдир. Чебышев бәрабәрсизлијинин көмәји илә 450 атәш ачдыгда

һәдәфә дәјмә сајынын 239 илә 301 арасында олмасы еһтималы һаггында нә демәк олар?

Чаваб: $P \geq 0,9$ .

19. X тәсадүфи кәмијјәтинин пајланма сыхлығы $p(x) = e^{-|x|}$-дир. $P(|X| < n)$ еһтималыны тапмалы вә Чебышев бәрабәрсизлијиндән истифадә едәрәк бу еһтималы ашағыдан гијмәтләндирмәли.

Чаваб: $1 - e^{-2n}$ ; $P \geq 1 - \frac{1}{2n^2}$ .

20. X тәсадүфи кәмијјәтинин пајланма чәдвәли ерилмишдир:

| X | -1 | 0 | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| P(x) | 0,2 | 0,4 | 0,3 | 0,05 | 0,05 |

$|X - M(X)| < 5$ олмасынын еһтималы нәјә бәрабәрдир? Чебышев бәрабәрсизлијиндән истифадә едәрәк бу еһтималы гијмәтләндирмәли.

Чаваб: 0,95 ; $P \geq 0,872$ .

21. Стандарт олмајан радиолампанын бурахылмасы еһтималы 25%-дир. 1000 радиолампа олан партијада стандарт олмајан радиолампанын 250-дән 40 әдәд аз олмасы еһтималыны ашағыдан гијмәтләндирмәли.

Чаваб: $P \geq 0,883$

22. 800 нәфәрдән ибарәт олан групда али савады олан шәхсләрин сајы өз ријази көзләмәсиндән фәргинин 30-дан аз олмасы еһтималыны ашағыдан гијмәтләндирмәли.

Чаваб: $P \geq 7/9$ .

23. Бир сынаг нәтичәсиндә һадисәнин баш вермәси еһтималы p=0,7 оларса, нә гәдәр асылы олмајан сынаг апардыгда $\left|\frac{m}{n}-p\right|< 0,2$ бәрабәрсизлијини өдәјән еһтимал 0,96-ны ашмаз?

Чаваб: n>131 .

Бернулли теореминдән истифадә едәрәк ашағыдакы (24-28) мәсәләләри һәлл един.

24. Ајры-ајры сынаг нәтичәсиндә һадисәнин баш вермәси еһтималы p=0,8-дир. 1000 дәфә асылы олмајан тәкрар сынаглар апардыгда һадисәләрин баш вермәсинин тезлијинин бир сынагда олан еһтималындан мејлинин мүтләг гијмәтчә 0,05-дән кичик олмасы еһтималыны гијмәтләндирмәли.

Чаваб: $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<0,05\right)>0,936$ .

25. Ајры-ајры сынаг заманы p=0,8 олдугда n- ин һансы гијмәтиндән башлајараг асылы олмајан сынаглар үчүн $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<0,1\right)>0,97$ шәрти өдәнилир?

Чаваб: $n \geq 534$ .

26. Нечә әдәд асылы олмајан сынаг кечирмәк лазымдыр ки, $\left|\frac{m}{n}-p\right|<0,06$ бәрабәрсизлијинин өдәнилмәси еһтималы, һәр кечирилән сынаг үчүн һадисәнин баш вермәси еһтималы p=0,7 олдугда 0,78-и ашмасын?

Чаваб: n>265 .

27. Техники јохламанын мә"луматы үзрә бурахылан деталларын јарарсыз олмасы үмуми сајын 2,5%-ни тәшкил едир. Бернулли теореминдән истифадә едәрәк, 8000 деталы јохладыгда деталын јарарсыз олмасынын орта гијмәтиндән мејлинин

0,005-дән ашағы олмасы еһтималыны гијмәтләндирмәли.

Чаваб: $P > 0,878125$

28.Һадисәнин һәр бир сынагда баш вермә еһтималы р=0,6-дыр. n-ин һансы гијмәтиндән башлајараг асылы олмајан сынаглар үчүн

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0,1\right) > 0,97$$ шәрти өдәнилир?

Чаваб: $n=801$ .

Чебышев теореминдән истифадә едәрәк ашағыдакы (29-31) мәсәләләри һәлл един.

29. 2500 асылы олмајан тәсадүфи кәмијјәтин һәр биринин дисперсијасы 5-и ашмыр. Бу кәмијјәтләрин әдәди ортасынын онларын ријази көзләмәләринин әдәди ортасындан мејлинин мүтләг гијмәтчә 0,4-ү ашмамасы еһтималыны гијмәтләндирин.

Чаваб: $P \geq 0,9875$

30. Верилмиш асылы олмајан тәсадүфи кәмијјәтләрин һәр биринин дисперсијасынын 4-ү ашмамасы мә"лумдур. Онларын әдәди ортасынын ријази көзләмәләринин әдәди ортасындан мејлинин 0,25-дән чох олмамасы еһтималы 0,99 олан тәсадүфи кәмијјәтләр сајыны тапмалы.

Чаваб: $n>6400$

31. $X_n$ тәсадүфи кәмијјәтләринин пајланма гануну ашағыдакы чәдвәлләрлә верилдикдә, асылы олмајан $\{X_n\}$ тәсадүфи кәмијјәтләр ардычыллығына Чебышев теореминин тәтбиг олуна билмәсини арашдырмалы:

а)

| X | $-n^2$ | 0 | $n^2$ |
|---|---|---|---|
| P(X) | $2^{-n}$ | $1-2^{1-n}$ | $2^{-n}$ |

б)

| X | $-n^{\alpha}$ | 0 | $n^{\alpha}$ |
|---|---|---|---|
| P(X) | $\alpha^{-n}$ | $1-\alpha^{1-n}$ | $\alpha^{-n}$ |

Чаваб: а) бәли ; б) бәли.

Марков теореминдән истифадә едәрәк ашағыдакы (32-35) мәсәләләри һәлл един.

32. Марков теоремини исбат един:

"$X_1,X_2,...,X_n$ гијмәтләри кифајәт гәдәр бөјүк олан асылы олмајан елә тәсадүфи кәмијјәтләрдир ки,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_1)}{n^2}=0,$$

онда онларын әдәди ортасынын, бу тәсадүфи кәмијјәтләрин ријази көзләмәләринин әдәди ортасындан мејлинин әдәди гијмәтчә мүмкүн гәдәр кичик ε-ну ашмамасы еһтималы ваһидә чох јахындыр"

Чебышев теореминин Марков теореминин нәтичәси олмасыны көстәрмәли.

33. $X_n$ тәсадүфи кәмијјәтинин дисперсијасы $n^{\alpha}$ -ја бәрабәрдирсә ( α сабити 1-дән кичикдир) вә $X_1,X_2,...,X_n,...$ асылы олмајан тәсадүфи кәмијјәтләринин һәр биринин ријази көзләмәси сыфра бәрабәрдирсә, бу ардычыллыға бөјүк әдәдләр ганунуну тәтбиг етмәк олармы? (Көстәриш: Марков теоремини тәтбиг един, бах мәсәлә 1)

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D(X_k)=\frac{1}{n^2}(1^{\alpha}+2^{\alpha}+3^{\alpha}+\cdots+n^{\alpha})\le$$

$$\le\frac{1}{n^2}\int_1^{n+1}x^{\alpha}dx=\frac{(n+1)^{\alpha}-1}{n^2(\alpha+1)}\le\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{n^2(\alpha+1)}\to0\quad(n\to\infty)$$

34. $X_n$ тәсадүфи кәмијјәти анчаг $-\sqrt{\ln n}$ вә $\sqrt{\ln n}$ гијмәтләрини ејни еһтималла алырса, $X_1,X_2,...,X_n,...$ асылы олмајан тәсадүфи кәмијјәтләринин ардычыллығына бөјүк әдәдләр ганунуну тәтбиг етмәк олармы?

Көстәриш: Марков теоремини тәтбиг етмәли (бах мәсәлә 4) вә

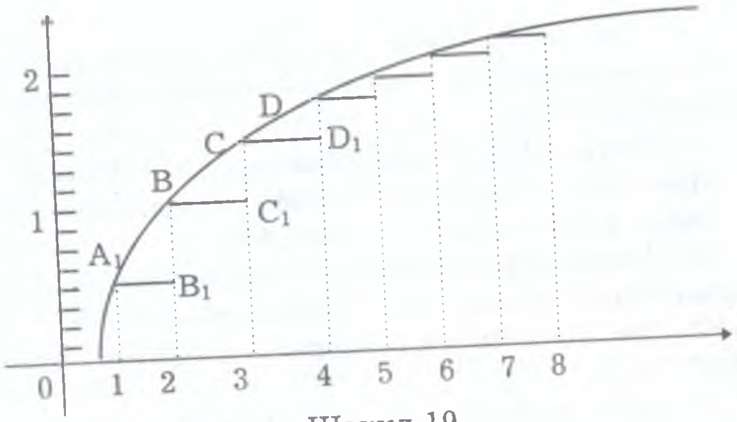


$$\ln2+\ln3+\ldots+\ln n\le\int_1^{n+1}\ln x\,dx$$

бәрабәрсизлијиндән истифадә етмәли. Бу бәрабәрсизлијин доғрулуғуна инанмаг үчүн шәкил 19-а бахын.

Чаваб:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{n}D(X_n)=(1+\frac{1}{n})\cdot\frac{\ln(n+1)}{n}-\frac{1}{n}\to0\quad(n\to\infty)$$




Шәкил 19

35. $X_n$ тәсадүфи кәмијјәтләринин пајланма гануну ашағыдакы чәдвәлләрлә верилдикдә, асылы олмајан $\{X_n\}$ тәсадүфи кәмијјәтләр ардычыллығына Марков теореминин тәтбиг олуна билмәсини арашдырмалы:

а)

| X | $-\ln n$ | $\ln n$ |
|---|---|---|
| P(X) | 0,5 | 0,5 |

б)

| X | $-\sqrt{n}\ \ln n$ | $\sqrt{n}\ \ln n$ |
|---|---|---|
| P(X) | 0,5 | 0,5 |

Чаваб: а) олар; б) олмаз .

# Әдәбиjjат


1. Нәсибов Ф.Һ. Еһтимал нәзәриjjәси вә риjази статистиканын елементләри.Азәрб.НКИ нәшри,1973.

2. Абдуллаjев Т.Һ. Еһтимал нәзәриjjәси. Азәрнәшр, 1962.

3. Гнеденко Б.В.Курс теории вероятностей. "Наука", 1969.

4.ГнеденкоБ.В.,Хинчин А.Н.Элементарное введение в теорию вероятностей. Гос.изд. Технико-теоретической литературы, 1957.

5. Смирнов Н.В., Лунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики (для технических приложений ). "Наука", 1965 .

6. Гмурман В.Е. Введение в теорию вероятностей и метематической статистики. "Высшая школа", 1963.

7. Суворов И.Ф. Курс высшей математики. "Высшая школа", 1961.

8. Белинский В.А. и др., Высшая математика с основами математической статистики."Высшая школа", 1965.

9. Румшинский Л.В. Элементы теории вероятностей. "Наука", 1966.

10. Нейман Ю. Вводный курс теории вероятностей и математической статистики. "Наука", 1968.

11. Венцель Е.С.,Овчаров Л.А., Теория вероятностей (задачи и упражнения), "Наука", 1969.

# ӘЛАВӘЛӘР

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ функсијасынын гијмәтләри чәдвәли

Чәдвәл 1

| x | φ(x) | x | φ(x) | x | φ(x) | x | φ(x) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,39894 | 0,20 | 0,39104 | 0,40 | 0,36827 | 0,60 | 0,33322 |
| 0,01 | 0,39892 | 0,21 | 0,39024 | 0,41 | 0,36678 | 0,61 | 0,33121 |
| 0,02 | 0,39886 | 0,22 | 0,38940 | 0,42 | 0,36526 | 0,62 | 0,32918 |
| 0,03 | 0,39876 | 0,23 | 0,38853 | 0,43 | 0,36371 | 0,63 | 0,32713 |
| 0,04 | 0,39862 | 0,24 | 0,38762 | 0,44 | 0,36213 | 0,64 | 0,32506 |
| 0,05 | 0,39844 | 0,25 | 0,38667 | 0,45 | 0,36053 | 0,65 | 0,32297 |
| 0,06 | 0,39822 | 0,26 | 0,38568 | 0,46 | 0,35889 | 0,66 | 0,32086 |
| 0,07 | 0,39797 | 0,27 | 0,38466 | 0,47 | 0,35723 | 0,67 | 0,31874 |
| 0,08 | 0,39767 | 0,28 | 0,38361 | 0,48 | 0,35553 | 0,68 | 0,31659 |
| 0,09 | 0,39733 | 0,29 | 0,38251 | 0,49 | 0,35381 | 0,69 | 0,31443 |
| 0,10 | 0,39695 | 0,30 | 0,38139 | 0,50 | 0,35207 | 0,70 | 0,31225 |
| 0,11 | 0,39654 | 0,31 | 0,38023 | 0,51 | 0,35029 | 0,71 | 0,31006 |
| 0,12 | 0,39608 | 0,32 | 0,37903 | 0,52 | 0,34849 | 0,72 | 0,30785 |
| 0,13 | 0,39559 | 0,33 | 0,37780 | 0,53 | 0,34667 | 0,73 | 0,30563 |
| 0,14 | 0,39505 | 0,34 | 0,37654 | 0,54 | 0,34482 | 0,74 | 0,30339 |
| 0,15 | 0,39448 | 0,35 | 0,37524 | 0,55 | 0,34294 | 0,75 | 0,30114 |
| 0,16 | 0,39387 | 0,36 | 0,37391 | 0,56 | 0,34105 | 0,76 | 0,29887 |
| 0,17 | 0,39322 | 0,37 | 0,37255 | 0,57 | 0,33912 | 0,77 | 0,29659 |
| 0,18 | 0,39253 | 0,38 | 0,37115 | 0,58 | 0,33718 | 0,78 | 0,29430 |
| 0,19 | 0,39181 | 0,39 | 0,36973 | 0,59 | 0,33521 | 0,79 | 0,29200 |

| x | φ(x) | x | φ(x) | x | φ(x) | x | φ(x) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,80 | 0,28969 | 1,10 | 0,21785 | 1,40 | 0,14973 | 1,70 | 0,09405 |
| 0,81 | 0,28737 | 1,11 | 0,21546 | 1,41 | 0,14764 | 1,71 | 0,09246 |
| 0,82 | 0,28504 | 1,12 | 0,21307 | 1,42 | 0,14556 | 1,72 | 0,09089 |
| 0,83 | 0,28269 | 1,13 | 0,21069 | 1,43 | 0,14350 | 1,73 | 0,08933 |
| 0,84 | 0,28034 | 1,14 | 0,20831 | 1,44 | 0,14146 | 1,74 | 0,08780 |
| 0,85 | 0,27798 | 1,15 | 0,20594 | 1,45 | 0,13943 | 1,75 | 0,08628 |
| 0,86 | 0,27562 | 1,16 | 0,20357 | 1,46 | 0,13742 | 1,76 | 0,08478 |
| 0,87 | 0,27324 | 1,17 | 0,20121 | 1,47 | 0,13542 | 1,77 | 0,08329 |
| 0,88 | 0,27086 | 1,18 | 0,19886 | 1,48 | 0,13344 | 1,78 | 0,08183 |
| 0,89 | 0,26848 | 1,19 | 0,19652 | 1,49 | 0,13147 | 1,79 | 0,08038 |
| 0,90 | 0,26609 | 1,20 | 0,19419 | 1,50 | 0,12952 | 1,80 | 0,07895 |
| 0,91 | 0,26369 | 1,21 | 0,19186 | 1,51 | 0,12758 | 1,81 | 0,07754 |
| 0,92 | 0,26129 | 1,22 | 0,18954 | 1,52 | 0,12566 | 1,82 | 0,07614 |
| 0,93 | 0,25888 | 1,23 | 0,18724 | 1,53 | 0,12376 | 1,83 | 0,07477 |
| 0,94 | 0,25647 | 1,24 | 0,18494 | 1,54 | 0,12188 | 1,84 | 0,07341 |
| 0,95 | 0,25406 | 1,25 | 0,18265 | 1,55 | 0,12001 | 1,85 | 0,07206 |
| 0,96 | 0,25164 | 1,26 | 0,18037 | 1,56 | 0,11816 | 1,86 | 0,07074 |
| 0,97 | 0,24923 | 1,27 | 0,17810 | 1,57 | 0,11632 | 1,87 | 0,06943 |
| 0,98 | 0,24681 | 1,28 | 0,17585 | 1,58 | 0,11450 | 1,88 | 0,06814 |
| 0,99 | 0,24439 | 1,29 | 0,17360 | 1,59 | 0,11270 | 1,89 | 0,06687 |
| 1,00 | 0,24197 | 1,30 | 0,17137 | 1,60 | 0,11092 | 1,90 | 0,06562 |
| 1,01 | 0,23955 | 1,31 | 0,16915 | 1,61 | 0,10915 | 1,91 | 0,06438 |
| 1,02 | 0,23713 | 1,32 | 0,16694 | 1,62 | 0,10741 | 1,92 | 0,06316 |
| 1,03 | 0,23471 | 1,33 | 0,16474 | 1,63 | 0,10567 | 1,93 | 0,06195 |
| 1,04 | 0,23230 | 1,34 | 0,16256 | 1,64 | 0,10396 | 1,94 | 0,06077 |
| 1,05 | 0,22988 | 1,35 | 0,16038 | 1,65 | 0,10226 | 1,95 | 0,05959 |
| 1,06 | 0,22747 | 1,36 | 0,15822 | 1,66 | 0,10059 | 1,96 | 0,05844 |
| 1,07 | 0,22506 | 1,37 | 0,15608 | 1,67 | 0,09893 | 1,97 | 0,05730 |
| 1,08 | 0,22265 | 1,38 | 0,15395 | 1,68 | 0,09728 | 1,98 | 0,05618 |
| 1,09 | 0,22025 | 1,39 | 0,15183 | 1,69 | 0,09566 | 1,99 | 0,05508 |

| x | φ(x) | x | φ(x) | x | φ(x) | x | φ(x) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,00 | 0,05399 | 2,30 | 0,02833 | 2,60 | 0,01358 | 2,90 | 0,00595 |
| 2,01 | 0,05292 | 2,31 | 0,02768 | 2,61 | 0,01323 | 2,91 | 0,00578 |
| 2,02 | 0,05186 | 2,32 | 0,02705 | 2,62 | 0,01289 | 2,92 | 0,00562 |
| 2,03 | 0,05082 | 2,33 | 0,02643 | 2,63 | 0,01256 | 2,93 | 0,00545 |
| 2,04 | 0,04980 | 2,34 | 0,02582 | 2,64 | 0,01223 | 2,94 | 0,00530 |
| 2,05 | 0,04879 | 2,35 | 0,02522 | 2,65 | 0,01191 | 2,95 | 0,00514 |
| 2,06 | 0,04780 | 2,36 | 0,02463 | 2,66 | 0,01160 | 2,96 | 0,00499 |
| 2,07 | 0,04682 | 2,37 | 0,02406 | 2,67 | 0,01130 | 2,97 | 0,00485 |
| 2,08 | 0,04586 | 2,38 | 0,02349 | 2,68 | 0,01100 | 2,98 | 0,00470 |
| 2,09 | 0,04491 | 2,39 | 0,02294 | 2,69 | 0,01071 | 2,99 | 0,00457 |
| 2,10 | 0,04398 | 2,40 | 0,02239 | 2,70 | 0,01042 | 3,00 | 0,00443 |
| 2,11 | 0,04307 | 2,41 | 0,02186 | 2,71 | 0,01014 | 3,01 | 0,00430 |
| 2,12 | 0,04217 | 2,42 | 0,02134 | 2,72 | 0,00987 | 3,02 | 0,00417 |
| 2,13 | 0,04128 | 2,43 | 0,02083 | 2,73 | 0,00961 | 3,03 | 0,00405 |
| 2,14 | 0,04041 | 2,44 | 0,02033 | 2,74 | 0,00935 | 3,04 | 0,00393 |
| 2,15 | 0,03955 | 2,45 | 0,01984 | 2,75 | 0,00909 | 3,05 | 0,00381 |
| 2,16 | 0,03871 | 2,46 | 0,01936 | 2,76 | 0,00885 | 3,06 | 0,00370 |
| 2,17 | 0,03788 | 2,47 | 0,01888 | 2,77 | 0,00861 | 3,07 | 0,00358 |
| 2,18 | 0,03706 | 2,48 | 0,01842 | 2,78 | 0,00837 | 3,08 | 0,00348 |
| 2,19 | 0,03626 | 2,49 | 0,01797 | 2,79 | 0,00814 | 3,09 | 0,00337 |
| 2,20 | 0,03547 | 2,50 | 0,01753 | 2,80 | 0,00792 | 3,10 | 0,00327 |
| 2,21 | 0,03470 | 2,51 | 0,01709 | 2,81 | 0,00770 | 3,11 | 0,00317 |
| 2,22 | 0,03394 | 2,52 | 0,01667 | 2,82 | 0,00748 | 3,12 | 0,00307 |
| 2,23 | 0,03319 | 2,53 | 0,01625 | 2,83 | 0,00727 | 3,13 | 0,00298 |
| 2,24 | 0,03246 | 2,54 | 0,01585 | 2,84 | 0,00707 | 3,14 | 0,00288 |
| 2,25 | 0,03174 | 2,55 | 0,01545 | 2,85 | 0,00687 | 3,15 | 0,00279 |
| 2,26 | 0,03103 | 2,56 | 0,01506 | 2,86 | 0,00668 | 3,16 | 0,00271 |
| 2,27 | 0,03034 | 2,57 | 0,01468 | 2,87 | 0,00649 | 3,17 | 0,00262 |
| 2,28 | 0,02965 | 2,58 | 0,01431 | 2,88 | 0,00631 | 3,18 | 0,00254 |
| 2,29 | 0,02898 | 2,59 | 0,01394 | 2,89 | 0,00613 | 3,19 | 0,00246 |

1-чи чәдвәлин арды

| x | φ(x) | x | φ(x) | x | φ(x) | x | φ(x) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,20 | 0,00238 | 3,40 | 0,00123 | 3,60 | 0,00061 | 3,80 | 0,00029 |
| 3,21 | 0,00231 | 3,41 | 0,00119 | 3,61 | 0,00059 | 3,81 | 0,00028 |
| 3,22 | 0,00224 | 3,42 | 0,00115 | 3,62 | 0,00057 | 3,82 | 0,00027 |
| 3,23 | 0,00216 | 3,43 | 0,00111 | 3,63 | 0,00055 | 3,83 | 0,00026 |
| 3,24 | 0,00210 | 3,44 | 0,00107 | 3,64 | 0,00053 | 3,84 | 0,00025 |
| 3,25 | 0,00203 | 3,45 | 0,00104 | 3,65 | 0,00051 | 3,85 | 0,00024 |
| 3,26 | 0,00196 | 3,46 | 0,00100 | 3,66 | 0,00049 | 3,86 | 0,00023 |
| 3,27 | 0,00190 | 3,47 | 0,00097 | 3,67 | 0,00047 | 3,87 | 0,00022 |
| 3,28 | 0,00184 | 3,48 | 0,00094 | 3,68 | 0,00046 | 3,88 | 0,00021 |
| 3,29 | 0,00178 | 3,49 | 0,00090 | 3,69 | 0,00044 | 3,89 | 0,00021 |
| 3,30 | 0,00172 | 3,50 | 0,00087 | 3,70 | 0,00042 | 3,90 | 0,00020 |
| 3,31 | 0,00167 | 3,51 | 0,00084 | 3,71 | 0,00041 | 3,91 | 0,00019 |
| 3,32 | 0,00161 | 3,52 | 0,00081 | 3,72 | 0,00039 | 3,92 | 0,00018 |
| 3,33 | 0,00156 | 3,53 | 0,00079 | 3,73 | 0,00038 | 3,93 | 0,00018 |
| 3,34 | 0,00151 | 3,54 | 0,00076 | 3,74 | 0,00037 | 3,94 | 0,00017 |
| 3,35 | 0,00146 | 3,55 | 0,00073 | 3,75 | 0,00035 | 3,95 | 0,00016 |
| 3,36 | 0,00141 | 3,56 | 0,00071 | 3,76 | 0,00034 | 3,96 | 0,00016 |
| 3,37 | 0,00136 | 3,57 | 0,00068 | 3,77 | 0,00033 | 3,97 | 0,00015 |
| 3,38 | 0,00132 | 3,58 | 0,00066 | 3,78 | 0,00031 | 3,98 | 0,00014 |
| 3,39 | 0,00127 | 3,59 | 0,00063 | 3,79 | 0,00030 | 3,99 | 0,00014 |

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$ – Лаплас функсијасынын

гијмәтләри чәдвәли

Чәдвәл 2

| x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,00000 | 0,26 | 0,20514 | 0,52 | 0,39694 | 0,78 | 0,56461 |
| 0,01 | 0,00798 | 0,27 | 0,21284 | 0,53 | 0,40389 | 0,79 | 0,57047 |
| 0,02 | 0,01596 | 0,28 | 0,22052 | 0,54 | 0,41080 | 0,80 | 0,57629 |
| 0,03 | 0,02393 | 0,29 | 0,22818 | 0,55 | 0,41768 | 0,81 | 0,58206 |
| 0,04 | 0,03191 | 0,30 | 0,23582 | 0,56 | 0,42452 | 0,82 | 0,58778 |
| 0,05 | 0,03988 | 0,31 | 0,24344 | 0,57 | 0,43132 | 0,83 | 0,59346 |
| 0,06 | 0,04784 | 0,32 | 0,25103 | 0,58 | 0,43809 | 0,84 | 0,59909 |
| 0,07 | 0,05581 | 0,33 | 0,25860 | 0,59 | 0,44481 | 0,85 | 0,60468 |
| 0,08 | 0,06376 | 0,34 | 0,26614 | 0,60 | 0,45149 | 0,86 | 0,61021 |
| 0,09 | 0,07171 | 0,35 | 0,27366 | 0,61 | 0,45814 | 0,87 | 0,61570 |
| 0,10 | 0,07966 | 0,36 | 0,28115 | 0,62 | 0,46474 | 0,88 | 0,62114 |
| 0,11 | 0,08759 | 0,37 | 0,28862 | 0,63 | 0,47131 | 0,89 | 0,62653 |
| 0,12 | 0,09552 | 0,38 | 0,29605 | 0,64 | 0,47783 | 0,90 | 0,63188 |
| 0,13 | 0,10343 | 0,39 | 0,30346 | 0,65 | 0,48431 | 0,91 | 0,63718 |
| 0,14 | 0,11134 | 0,40 | 0,31084 | 0,66 | 0,49075 | 0,92 | 0,64243 |
| 0,15 | 0,11924 | 0,41 | 0,31819 | 0,67 | 0,49714 | 0,93 | 0,64763 |
| 0,16 | 0,12712 | 0,42 | 0,32552 | 0,68 | 0,50350 | 0,94 | 0,65278 |
| 0,17 | 0,13499 | 0,43 | 0,33280 | 0,69 | 0,50981 | 0,95 | 0,65789 |
| 0,18 | 0,14285 | 0,44 | 0,34006 | 0,70 | 0,51607 | 0,96 | 0,66294 |
| 0,19 | 0,15069 | 0,45 | 0,34729 | 0,71 | 0,52230 | 0,97 | 0,66795 |
| 0,20 | 0,15852 | 0,46 | 0,35448 | 0,72 | 0,52848 | 0,98 | 0,67291 |
| 0,21 | 0,16633 | 0,47 | 0,36164 | 0,73 | 0,53461 | 0,99 | 0,67783 |
| 0,22 | 0,17413 | 0,48 | 0,36877 | 0,74 | 0,54070 | 1,00 | 0,68269 |
| 0,23 | 0,18191 | 0,49 | 0,37587 | 0,75 | 0,54675 | 1,01 | 0,68750 |
| 0,24 | 0,18967 | 0,50 | 0,38292 | 0,76 | 0,55275 | 1,02 | 0,69227 |
| 0,25 | 0,19741 | 0,51 | 0,38995 | 0,77 | 0,55870 | 1,03 | 0,69699 |

| x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,04 | 0,70166 | 1,35 | 0,82298 | 1,66 | 0,90309 | 1,97 | 0,95116 |
| 1,05 | 0,70628 | 1,36 | 0,82617 | 1,67 | 0,90508 | 1,98 | 0,95230 |
| 1,06 | 0,71086 | 1,37 | 0,82931 | 1,68 | 0,90704 | 1,99 | 0,95341 |
| 1,07 | 0,71538 | 1,38 | 0,83241 | 1,69 | 0,90897 | 2,00 | 0,95450 |
| 1,08 | 0,71986 | 1,39 | 0,83547 | 1,70 | 0,91087 | 2,01 | 0,95557 |
| 1,09 | 0,72429 | 1,40 | 0,83849 | 1,71 | 0,91273 | 2,02 | 0,95662 |
| 1,10 | 0,72867 | 1,41 | 0,84146 | 1,72 | 0,91457 | 2,03 | 0,95764 |
| 1,11 | 0,73300 | 1,42 | 0,84439 | 1,73 | 0,91637 | 2,04 | 0,95865 |
| 1,12 | 0,73729 | 1,43 | 0,84728 | 1,74 | 0,91814 | 2,05 | 0,95964 |
| 1,13 | 0,74152 | 1,44 | 0,85013 | 1,75 | 0,91988 | 2,06 | 0,96060 |
| 1,14 | 0,74571 | 1,45 | 0,85294 | 1,76 | 0,92159 | 2,07 | 0,96155 |
| 1,15 | 0,74986 | 1,46 | 0,85571 | 1,77 | 0,92327 | 2,08 | 0,96247 |
| 1,16 | 0,75395 | 1,47 | 0,85844 | 1,78 | 0,92492 | 2,09 | 0,96338 |
| 1,17 | 0,75800 | 1,48 | 0,86113 | 1,79 | 0,92655 | 2,10 | 0,96427 |
| 1,18 | 0,76200 | 1,49 | 0,86378 | 1,80 | 0,92814 | 2,11 | 0,96514 |
| 1,19 | 0,76595 | 1,50 | 0,86639 | 1,81 | 0,92970 | 2,12 | 0,96599 |
| 1,20 | 0,76986 | 1,51 | 0,86896 | 1,82 | 0,93124 | 2,13 | 0,96683 |
| 1,21 | 0,77372 | 1,52 | 0,87149 | 1,83 | 0,93275 | 2,14 | 0,96795 |
| 1,22 | 0,77754 | 1,53 | 0,87398 | 1,84 | 0,93423 | 2,15 | 0,96844 |
| 1,23 | 0,78130 | 1,54 | 0,87644 | 1,85 | 0,93569 | 2,16 | 0,96923 |
| 1,24 | 0,78502 | 1,55 | 0,87886 | 1,86 | 0,93711 | 2,17 | 0,96999 |
| 1,25 | 0,78870 | 1,56 | 0,88124 | 1,87 | 0,93852 | 2,18 | 0,97074 |
| 1,26 | 0,79233 | 1,57 | 0,88358 | 1,88 | 0,93989 | 2,19 | 0,97148 |
| 1,27 | 0,79592 | 1,58 | 0,88589 | 1,89 | 0,94124 | 2,20 | 0,97219 |
| 1,28 | 0,79945 | 1,59 | 0,88817 | 1,90 | 0,94257 | 2,21 | 0,97289 |
| 1,29 | 0,80295 | 1,60 | 0,89040 | 1,91 | 0,94387 | 2,22 | 0,97358 |
| 1,30 | 0,80640 | 1,61 | 0,89260 | 1,92 | 0,94514 | 2,23 | 0,97425 |
| 1,31 | 0,80980 | 1,62 | 0,89477 | 1,93 | 0,94639 | 2,24 | 0,97491 |
| 1,32 | 0,81316 | 1,63 | 0,89690 | 1,94 | 0,94762 | 2,25 | 0,97555 |
| 1,33 | 0,81648 | 1,64 | 0,89899 | 1,95 | 0,94882 | 2,26 | 0,97618 |
| 1,34 | 0,81975 | 1,65 | 0,90106 | 1,96 | 0,95000 | 2,27 | 0,97679 |

| x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,28 | 0,97739 | 2,57 | 0,98983 | 2,86 | 0,99576 | 3,15 | 0,99837 |
| 2,29 | 0,97798 | 2,58 | 0,99012 | 2,87 | 0,99590 | 3,16 | 0,99842 |
| 2,30 | 0,97855 | 2,59 | 0,99040 | 2,88 | 0,99602 | 3,17 | 0,99848 |
| 2,31 | 0,97911 | 2,60 | 0,99068 | 2,89 | 0,99615 | 3,18 | 0,99853 |
| 2,32 | 0,97966 | 2,61 | 0,99095 | 2,90 | 0,99627 | 3,19 | 0,99858 |
| 2,33 | 0,98019 | 2,62 | 0,99121 | 2,91 | 0,99639 | 3,20 | 0,99863 |
| 2,34 | 0,98072 | 2,63 | 0,99146 | 2,92 | 0,99650 | 3,22 | 0,99872 |
| 2,35 | 0,98123 | 2,64 | 0,99171 | 2,93 | 0,99661 | 3,24 | 0,99880 |
| 2,36 | 0,98172 | 2,65 | 0,99195 | 2,94 | 0,99672 | 3,26 | 0,99889 |
| 2,37 | 0,98221 | 2,66 | 0,99219 | 2,95 | 0,99682 | 3,28 | 0,99896 |
| 2,38 | 0,98269 | 2,67 | 0,99241 | 2,96 | 0,99692 | 3,30 | 0,99903 |
| 2,39 | 0,98315 | 2,68 | 0,99263 | 2,97 | 0,99702 | 3,32 | 0,99910 |
| 2,40 | 0,98360 | 2,69 | 0,99285 | 2,98 | 0,99712 | 3,34 | 0,99916 |
| 2,41 | 0,98405 | 2,70 | 0,99307 | 2,99 | 0,99721 | 3,36 | 0,99922 |
| 2,42 | 0,98448 | 2,71 | 0,99327 | 3,00 | 0,99730 | 3,38 | 0,99928 |
| 2,43 | 0,98490 | 2,72 | 0,99347 | 3,01 | 0,99739 | 3,40 | 0,99933 |
| 2,44 | 0,98531 | 2,73 | 0,99367 | 3,02 | 0,99747 | 3,42 | 0,99937 |
| 2,45 | 0,98571 | 2,74 | 0,99386 | 3,03 | 0,99755 | 3,44 | 0,99942 |
| 2,46 | 0,98611 | 2,75 | 0,99404 | 3,04 | 0,99763 | 3,46 | 0,99946 |
| 2,47 | 0,98649 | 2,76 | 0,99422 | 3,05 | 0,99771 | 3,48 | 0,99950 |
| 2,48 | 0,98686 | 2,77 | 0,99439 | 3,06 | 0,99779 | 3,50 | 0,99953 |
| 2,49 | 0,98723 | 2,78 | 0,99456 | 3,07 | 0,99786 | 3,52 | 0,99957 |
| 2,50 | 0,98758 | 2,79 | 0,99473 | 3,08 | 0,99793 | 3,54 | 0,99960 |
| 2,51 | 0,98793 | 2,80 | 0,99489 | 3,09 | 0,99800 | 3,56 | 0,99963 |
| 2,52 | 0,98826 | 2,81 | 0,99505 | 3,10 | 0,99806 | 3,58 | 0,99966 |
| 2,53 | 0,98859 | 2,82 | 0,99520 | 3,11 | 0,99813 | 3,60 | 0,99968 |
| 2,54 | 0,98891 | 2,83 | 0,99535 | 3,12 | 0,99819 | 3,62 | 0,99971 |
| 2,55 | 0,98923 | 2,84 | 0,99549 | 3,13 | 0,99825 | 3,64 | 0,99973 |
| 2,56 | 0,98953 | 2,85 | 0,99563 | 3,14 | 0,99831 | 3,66 | 0,99975 |

2-чи чәдвәлин арды

| x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **3,68** | **0,99977** | **3,76** | **0,99983** | **3,84** | **0,99988** | **3,94** | **0,99992** |
| **3,70** | **0,99978** | **3,78** | **0,99984** | **3,86** | **0,99989** | **3,98** | **0,99993** |
| **3,72** | **0,99980** | **3,80** | **0,99986** | **3,88** | **0,99990** | **4,20** | **0,99995** |
| **3,74** | **0,99982** | **3,82** | **0,99987** | **3,90** | **0,99990** | **4,50** | **0,99999** |

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$ Пуассон функсијасынын гијмәтләри чәдвәли

Чәдвәл 3

| m \ λ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,904837 | 0,818731 | 0,740818 | 0,670320 | 0,606531 | 0,548812 |
| 1 | 0,090484 | 0,163746 | 0,222245 | 0,268128 | 0,303265 | 0,329287 |
| 2 | 0,004524 | 0,016375 | 0,033337 | 0,053626 | 0,075816 | 0,098786 |
| 3 | 0,000151 | 0,001091 | 0,003334 | 0,007150 | 0,012636 | 0,019757 |
| 4 | 0,000004 | 0,000055 | 0,000250 | 0,000715 | 0,001580 | 0,002964 |
| 5 | 0,000000 | 0,000002 | 0,000015 | 0,000057 | 0,000158 | 0,000356 |
| 6 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000001 | 0,000004 | 0,000013 | 0,000035 |
| 7 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000001 | 0,000003 |

| m \ λ | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 2,0 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,496585 | 0,449329 | 0,406570 | 0,367879 | 0,135335 | 0,049787 |
| 1 | 0,347610 | 0,359463 | 0,365913 | 0,367879 | 0,270671 | 0,149361 |
| 2 | 0,121663 | 0,143785 | 0,164661 | 0,183940 | 0,270671 | 0,224042 |
| 3 | 0,028388 | 0,038343 | 0,049398 | 0,061313 | 0,180447 | 0,224042 |
| 4 | 0,004968 | 0,007669 | 0,011115 | 0,015328 | 0,090224 | 0,168031 |
| 5 | 0,000696 | 0,001227 | 0,002001 | 0,003066 | 0,036089 | 0,100819 |
| 6 | 0,000081 | 0,000164 | 0,000300 | 0,000511 | 0,012030 | 0,050409 |
| 7 | 0,000008 | 0,000019 | 0,000039 | 0,000073 | 0,003437 | 0,021604 |
| 8 | 0,000001 | 0,000002 | 0,000004 | 0,000009 | 0,000859 | 0,008102 |
| 9 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000001 | 0,000191 | 0,002701 |
| 10 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000038 | 0,000810 |

| m \ λ | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 2,0 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000007 | 0,000221 |
| 12 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000001 | 0,000055 |
| 13 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000013 |
| 14 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000003 |
| 15 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000001 |

| m \ λ | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 | 10,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,018316 | 0,006738 | 0,002479 | 0,000912 | 0,000335 | 0,000123 | 0,000045 |
| 1 | 0,073263 | 0,033690 | 0,014873 | 0,006383 | 0,002684 | 0,001111 | 0,000454 |
| 2 | 0,146525 | 0,084224 | 0,044618 | 0,022341 | 0,010735 | 0,004998 | 0,002270 |
| 3 | 0,195367 | 0,140374 | 0,089235 | 0,052129 | 0,028626 | 0,014994 | 0,007567 |
| 4 | 0,195367 | 0,175467 | 0,133853 | 0,091226 | 0,057252 | 0,033737 | 0,018917 |
| 5 | 0,156293 | 0,175467 | 0,160623 | 0,127717 | 0,091604 | 0,060727 | 0,037833 |
| 6 | 0,104194 | 0,146223 | 0,160623 | 0,149003 | 0,122138 | 0,091090 | 0,063055 |
| 7 | 0,059540 | 0,104445 | 0,137677 | 0,149003 | 0,139587 | 0,117116 | 0,090079 |
| 8 | 0,029770 | 0,065278 | 0,103258 | 0,130377 | 0,139587 | 0,131756 | 0,112599 |
| 9 | 0,013231 | 0,036266 | 0,068838 | 0,101405 | 0,124077 | 0,131756 | 0,125110 |
| 10 | 0,005292 | 0,018133 | 0,041303 | 0,070983 | 0,099262 | 0,118580 | 0,125110 |
| 11 | 0,001925 | 0,008242 | 0,022529 | 0,045171 | 0,072190 | 0,097020 | 0,113736 |
| 12 | 0,000642 | 0,003434 | 0,011264 | 0,026350 | 0,048127 | 0,072765 | 0,094780 |
| 13 | 0,000197 | 0,001321 | 0,005199 | 0,014188 | 0,029616 | 0,050376 | 0,072908 |
| 14 | 0,000056 | 0,000472 | 0,002228 | 0,007094 | 0,016924 | 0,032384 | 0,052077 |
| 15 | 0,000015 | 0,000157 | 0,000891 | 0,003311 | 0,009026 | 0,019431 | 0,034718 |
| 16 | 0,000004 | 0,000049 | 0,000334 | 0,001448 | 0,004513 | 0,010930 | 0,021699 |
| 17 | 0,000001 | 0,000014 | 0,000118 | 0,000596 | 0,002124 | 0,005786 | 0,012764 |
| 18 | 0,000000 | 0,000004 | 0,000039 | 0,000232 | 0,000944 | 0,002893 | 0,007091 |
| 19 | 0,000000 | 0,000001 | 0,000012 | 0,000085 | 0,000397 | 0,001370 | 0,003732 |
| 20 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000004 | 0,000030 | 0,000159 | 0,000617 | 0,001866 |

| λ / m | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | ,0 | 9,0 | 10,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000001 | 0,000010 | 0,000061 | 0,000264 | 0,000889 |
| 22 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000003 | 0,000022 | 0,000108 | 0,000404 |
| 23 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000001 | 0,000008 | 0,000042 | 0,000176 |
| 24 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000003 | 0,000016 | 0,000073 |
| 25 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000001 | 0,000006 | 0,000029 |
| 26 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000002 | 0,000011 |
| 27 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000001 | 0,000004 |
| 28 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000001 |

МҮНДӘРИЧАТ

I фәсил. Еһтимал нәзәријјәсинин әсас анлајышлары.

1.1. Һадисә. Һадисәләр үзәриндә әмәлләр.......... 4
1.2. Еһтималын классик тә"рифи.......................... 11
1.3. Һәндәси еһтимал............................................ 18
1.4. Еһтималларын топланмасы вә вурулмасы.... 28
1.5. Там еһтимал вә Бајес дүстуру........................ 38

II фәсил. Тәкрар сынаглар.

2.1. Бернулли дүстуру. Еһтималлар полигону.... 45
2.2. Ән чох еһтималлы әдәд................................ 50
2.3. Муавр-Лапласын локал вә интеграл теоремләри.................................................. 56
2.4. Пуассон теореми ............................................ 63

III фәсил. Тәсадүфи кәмијјәтләр вә онларын пајланмасы.

3.1 Тәсадүфи кәмијјәтләр вә онларын пајланма функсијалары.................................................. 69
3.2. Еһтималларын пајланма сыхлығы. Квантил анлајышы.............................................. 82
3.3. Тәсадүфи кәмијјәтин әдәди характеристикалары.................................................. 92

IV фәсил. Бөјүк әдәдләр гануну............................ .144

Әдәбијјат ...................................................... ... 174
Әлавәләр ...................................................... 175



*Нәшријјатын директору* - *Тәрлан Гулијев*
*Мәтбәәнин директору* - *Әһмәд Әлијев*
*Корректор* - *Алмаз Мәммәдова*
*Компутердә јыған* - *Мәммәд Сејидов*

**Еһтимал нәзәријјәсинә аид мәсәлә һәллинә рәһбәрлик**

(Али мәктәб тәләбәләри үчүн)

Јығылмаға верилмиш - 01.06. 1998
Чапа имзаланмыш 16.09. 1998

Китаб "Чап" мәтбәәсиндә
офсет үсулу илә чап олунуб

кағыз форматы 84/60 , 1/16
чап вәрәгәси 11,7
Тиражы - 1500
Гијмәти мүгавилә илә